Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2010/2011

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	15.02.2011
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen 4 Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen, zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Aufgabe 1 (Theoretische Grundlagen der Linearen Optimierung) [30 Punkte]

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte

These 1: Wir betrachten ein primales lineares Programm und stellen fest, dass dieses Problem keine zulässige Lösung besitzt. Dann wissen wir, falls das zugehörige duale Programm eine zulässige Lösung hat, dass dieses unbeschränkt ist. (5 Punkte)

These 2: Wir betrachten ein primales lineares Programm und stellen fest, dass dieses Problem keine zulässige Lösung besitzt. Dann wissen wir, dass das zugehörige duale Programm unbeschränkt ist. (5 Punkte)

These 3: Wir betrachten ein lineares Programm in Standardform mit einer minimierenden Zielfunktion $c^T x$ und einer Matrix A sowie einem Ergebnisvektor b. Zudem sei eine Basis von m Spaltenvektoren der Matrix A gegeben. Dann ist die zugehörige Basislösung eindeutig bestimmt und zulässig. (5 Punkte)

These 4: Wir betrachten ein lineares Programm in allgemeiner Form und wandeln es in die Standardform um. Werden bei dieser Prozedur die Dimensionen der Matrix A größer, wird auch die Dimensionalität des Lösungsraumes größer. Das heißt, die Zahl der zulässigen Lösungen wächst. (5 Punkte)

These 5: Wir betrachten ein lineares Programm in Standardform mit einer total unimodularen Matrix A. Dann existiert zu jeder nicht-ganzzahligen Lösung eine ganzzahlige Lösung, die hinsichtlich des Zielfunktionswertes nicht schlechter ist. (5 Punkte)

These 6: Wir betrachten ein lineares Programm mit einer minimierenden Zielfunktion $c^T x$ und einer Matrix A sowie einem Ergebnisvektor b. Zudem suchen wir die ganzzahlige Lösung mit dem geringsten Zielfunktionswert. Wir wenden den primalen Simplexalgorithmus auf dieses Problem an. Dazu lässt sich feststellen, dass dieser Algorithmus nur dann eine ganzzahlige Lösung als optimale Lösung ermitteln wird, wenn die Matrix A total unimodular ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 (Dualität) **[30 Punkte]**

Wir betrachten das folgende lineare Programm

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } -x_1\\
&\text{s.t.}\\
&-x_1 + x_2 \le -5\\
&2x_1 + x_2 \le 7\\
&x_1 + 2x_2 \ge -7\\
&x_1 \ge 0\\
&x_2 \text{ frei}
\end{aligned}$$

a) Formen Sie das obige Problem in Standardform um. (10 Punkte)

b) Finden Sie zu der zulässigen primalen Lösung $(1,-4)^T$ die Basis B und die zugehörige Matrix A_B. (14 Punkte)

c) Skizzieren Sie, wie Sie mit Hilfe der zugehörigen dualen Lösung die Optimalität der gegebenen primalen Lösung beweisen können. Zur Erklärung: Sie brauchen die duale Lösung nicht zu berechnen, sondern nur erklären, wie Sie vorgehen würden. (6 Punkte)

Aufgabe 3 (Dijkstra-Algorithmus) **[15 Punkte]**

Wir betrachten den gerichteten Graphen mit der Pfeilmenge

$$E = \{(1,2),(1,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,4),(4,6),(5,4),(5,6)\}$$

und den Pfeilgewichten

$$c_{12} = 5; c_{13} = 2; c_{24} = 2; c_{25} = 1; c_{32} = 2; c_{34} = 3; c_{46} = 5; c_{54} = 3; c_{56} = 4.$$

a) Zeichnen Sie den Graphen inklusive der Gewichte. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 6 und geben Sie diesen an. (12 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[15 Punkte]**

Berechnen Sie mittels Branch & Bound eine optimale ganzzahlige Lösung des folgenden Problems:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } 2\cdot x_1 + 1\cdot x_2\\
&\text{s.t.}\\
&1\cdot x_2 - 6 \leq 1\\
&4\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \leq 16\\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ ganzzahlig}
\end{aligned}$$