Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2012

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	21.09.2012
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen, zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Aufgabe 1 (Theoretische Grundlagen der Optimierung) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte

These 1: Wir betrachten den Berechnungsablauf des dualen Simplex Algorithmus. Dieser wechselt in jedem Berechnungsschritt von einer primal zulässigen Basislösung zu einer anderen primal zulässigen Basislösung. Sobald alle reduzierten Kosten nicht negativ sind, ist die optimale Lösung gefunden. (5 Punkte)

These 2: Zu jeder Basis B eines Linearen Programms in Standardform existieren mehrere Basislösungen. Allerdings ist nur eine von diesen zulässig. (5 Punkte)

These 3: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform, das eine Maximierungsaufgabe darstellt. Wir nehmen ferner an, dass es für dieses Programm keine zulässige Lösung gibt. Dann ist auch die duale Aufgabe nicht lösbar und somit unzulässig. (5 Punkte)

These 4: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform, das eine Minimierungsaufgabe darstellt. Zudem sei eine zulässige Lösung des Problems mit Zielfunktionswert *ZP* bekannt. Eine dual zulässige Lösung kann dann einen Zielfunktionswert besitzen, der größer ist als *ZP*. (5 Punkte)

These 5: Jede zulässige Basislösung der LP-Relaxation eines ausbalancierten Transportproblems ist ganzzahlig. (5 Punkte)

These 6: Bei Anwendung des Schnittebenenverfahrens von Gomory auf ein ganzzahliges Optimierungsproblem in Standardform mit insgesamt n Variablen sind maximal $n+1$ Schnitte einzufügen, um die optimale Lösung zu erhalten. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem) **[30 Punkte]**

Gegeben sei das folgende ausbalancierte Transportproblem mit 3 Anbietern mit einem Angebotsvektor $\vec{a}^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ und 4 Nachfragern mit Nachfragevektor $\vec{b}^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Die Kosten für die einzelnen Transporte von Anbietern *i* zu Nachfragern *j* sind der folgenden Matrix c_{ij} zu entnehmen:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Zudem seien eine erste primal zulässige Lösung $x_{ij}^{INITIAL}$ und eine erste dual zulässige Lösung $\vec{\alpha}^{INITIAL}, \vec{\beta}^{INITIAL}$ wie folgt gegeben:

$$x_{ij}^{INITIAL} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}^{INITIAL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\beta}^{INITIAL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Warum können beide Lösungen gleichzeitig nicht optimal sein? Argumentieren Sie dazu auf zwei verschiedene Weisen. Verwenden Sie dazu in einer der beiden Argumentationslinien die durch die duale Lösung erzeugte Matrix $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - \alpha_i^{INITIAL} - \beta_j^{INITIAL}$ und die Variablen $x_{ij}^{INITIAL} > 0$ der primalen Lösung $x_{ij}^{INITIAL}$. (8 Punkte)

b) Zeichnen Sie nun das im Alpha-Beta-Algorithmus verwendete Netzwerk unter Zuhilfenahme der angegebenen dualen Lösung. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie den maximalen s-t-Fluss in diesem Netzwerk mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson. (12 Punkte)

d) Welche Bedeutung hat der Gesamtwert *f* dieses Flusses bei einer Interpretation der Optimalität der dualen Lösung im Kontext des Transportproblems? Ist im angegebenen Beispiel die durch den gefunden maximalen s-t Fluss ableitbare Lösung optimal? (5 Punkte)

Aufgabe 3 (Ganzzahlige Optimierung) **[30 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

Maximiere $x_1 + x_2$

s. t.

$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 10$

$x_1 \leq x_2$

mit $x_1, x_2 \geq 0$ und x_1, x_2 ganzzahlig!

a) Bestimmen Sie die Lösung der LP-Relaxation unter Verwendung des Simplexalgorithmus‘. (10 Punkte)

b) Berechnen Sie ausgehend vom optimalen Simplextableau der LP-Relaxation die optimale ganzzahlige Lösung mit dem Branch & Bound Verfahren. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie ausgehend vom optimalen Simplextableau der LP-Relaxation die optimale ganzzahlige Lösung mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory. (10 Punkte)