Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Sommersemester 2018

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	26.07.2018
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der drei gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

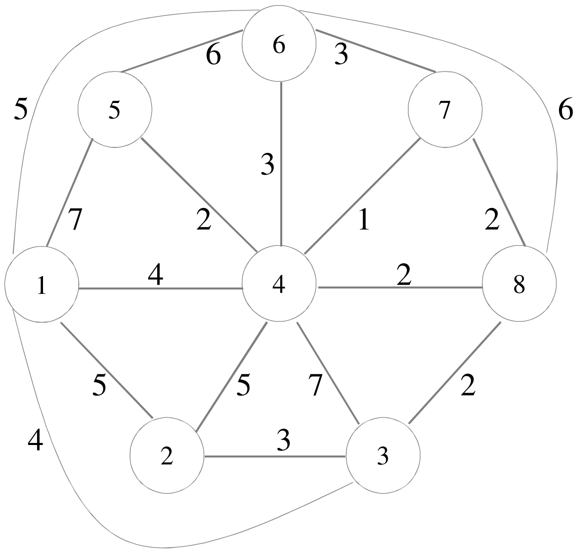
Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Aufgabe 1 (Symmetrisches TSP) **[32 Punkte]**

Sei der folgende ungerichtete Graph gegeben.



a) Um eine untere Schranke für das symmetrische TSP zu finden wird hier die Lagrange-Relaxation mit den Multiplieren $g_1, \dots, g_8$ betrachtet. Dabei ist $g_8 = -3$. Das neue Netzwerk, welches zur Ermittlung der max 1-tree Schranke für die gegebenen Multiplier dient, weist die folgenden durch die aktuellen Multiplier veränderten Kantenkosten $c_{7,8}^{neu} = -2$, $c_{7,4}^{neu} = 4$, $c_{4,5}^{neu} = 4$, $c_{1,5}^{neu} = 8$, $c_{6,8}^{neu} = 4$, $c_{1,2}^{neu} = 6$, $c_{2,3}^{neu} = 3$ auf. Ermitteln Sie mit diesen Informationen die übrigen Multiplier und zeichnen Sie das neue Netzwerk. (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie $L_g(x)$, wobei x ein minimaler 1-tree mit $\sum_{i<1} x_{i,1} + \sum_{k>1} x_{1,k} = 2$ und $g = (g_1, \dots, g_8)$ ist. Falls Sie unter a) keine Lösung ermitteln konnten, wählen Sie eine beliebige (vom Nullvektor verschiedene) Belegung für g. (7 Punkte)

c) Sei ein Optimierungsproblem der Form

$$\min c^T x$$
$$s.t\ Ax = a \qquad \text{(schwierig)}$$
$$Bx \leq b \qquad \text{(leicht)}$$
$$x \in IR^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$$

gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle Multiplier ist der Zielfunktionswert einer optimalen Lösung der Lagrange-Relaxation eine untere Schranke für das Originalproblem. (7 Punkte)

d) Gesucht wird eine Rundreise auf den Knoten 1,4,5,6. Dazu wird das Branch and Bound Verfahren von Little et al. angewendet. Ermitteln Sie die untere Schranke des Wurzelknotens. (8 Punkte)

Aufgabe 2 (Goldschmiede) [40 Punkte]

In einer Goldschmiede werden verschiedene Schmuckstücke von zwei Arbeitern hergestellt, die jeweils 8 Stunden pro Tag arbeiten. Sie bearbeiten die Produktionsprozesse jeweils gemeinsam, wodurch sich die unten angegebenen Prozesszeiten halbieren. Wird ein Produkt bearbeitet, so muss es am selben Tag fertiggestellt werden. Die Anzahl der benötigten Arbeitstage für die Herstellung der folgenden Schmuckstücke soll minimiert werden.

Produkt:	Ohrringe (O)	Silberring (S)	Armreif (A)	Goldkette (G)
Prozesszeit p in h:	3	4	5	12
Mengen d:	18	8	5	6

a) Zu welchen aus der Vorlesung bekannten Optimierungsproblem ist dieses Problem äquivalent? Gehen Sie dabei auf die Nebenbedingungen und die Zielfunktion ein und geben Sie die entsprechenden Parameter an. (8 Punkte)

b) Die beiden Arbeiter wollen mithilfe der LP-Relaxation dieses Problems eine untere Schranke ermitteln. Während ihrer Berechnung erhalten sie die duale Lösung $y^T = (y_O, y_S, y_A, y_G) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Ist die optimale Lösung für die LP-Relaxation bereits gefunden? Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Betrachten Sie Arbeitstage, an denen insbesondere Armreifen produziert werden. (8 Punkte)

c) Ermitteln Sie die ersten beiden unteren Schranken des SALOME-Verfahrens.(4 Punkte)

d) Die Goldschmiede möchte weitere Produkte herstellen. Diese benötigen aber zum Teil Zwischenprodukte, die vorher hergestellt werden müssen und erst am nächsten Tag genutzt werden können (bspw. Goldkugeln, die zunächst aushärten und frühestens am nächsten Tag am Armreif angebracht werden können). Dieses Problem entspricht nicht ganz dem SALBP-F. Welche Restriktion muss wie angepasst werden? (4 Punkte)

e) Sei nun allgemein eine SALBP-1 Instanz gegeben. Angenommen jede Aufgabe (task) j erhält das Label $\left(\sum_{k \in \{h | h < j \wedge h \notin P_j^*\}} L(k) + 1, \sum_{k \in \{h | h > j \wedge h \notin F_j^*\}} L'(k) + 1\right)$. Seien zwei partielle Lösungen L_1 und L_2 gegeben, bei denen zulässig vorwärts und rückwärts Aufgaben den Stationen zugeordnet wurden und sei $V(L_i)$ die Menge der vorwärts hinzugefügten Aufgaben (tasks) bezüglich L_i und $R(L_i)$ die Menge der rückwärts hinzugefügten Aufgaben (tasks) bezüglich L_i.

Nehmen Sie zur folgenden These Stellung: Nur dann haben beide partiellen Lösungen die gleichen Aufgaben (tasks) aufgenommen, wenn

$(\sum_{k\in V(L_1)} L(k), \sum_{k\in R(L_1)} L'(k)) = (\sum_{k\in V(L_2)} L(k), \sum_{k\in R(L_2)} L'(k))$ gilt.

(8 Punkte)

f) Für das Restaurieren und Reparieren von Schmuckstücken wird ein einzelner Arbeiter für 16 Zeiteinheiten [ZE] pro Tag eingesetzt, der die Aufträge vollständig ohne Unterbrechung nacheinander bearbeitet. Heute müssen vier Aufträge bearbeitet werden. Die Kunden möchten zu bestimmten Zeitpunkten ihre Objekte abholen. Diese sind in der folgenden Tabelle zu finden (Startpunkt=0 [ZE]).

Produkt:	Taschenuhr	Goldring	Armband	Medaillon
Prozesszeit *p* [in ZE]:	2	3	7	4
Abholzeitpunkt *d* [in ZE]:	3	4	9	15

Ermitteln Sie mithilfe des Ansatzes von Lawler einen Schedule mit minimaler Verspätung. (8 Punkte)

Aufgabe 3 (Line-TSP) **[18 Punkte]**

Sei die folgende Line-TSP Instanz ohne Auslieferungszeiten aber mit deadlines gegeben:

Position i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Deadline *d*:	20	25	14	3	0	1	7	17	30

Der Wechsel von Position i zu Position $i+1$ (bzw. zu $i-1$) benötigt eine Zeiteinheit.

a) Was ist die Bedeutung der Zustände $V^+(i,j)$ und $V^-(i,j)$? (3 Punkte)

b) Bei welchem Kunden i^* muss gestartet werden, um überhaupt zulässige Lösungen zu erhalten? (2 Punkte)

c) Kann es sinnvoll sein, nach der Belieferung des Kunden 2, den Kunden 1 *nicht direkt anschließend* zu beliefern? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Zustand $V^+(4,7)$ mithilfe der dynamischen Programmierung. (10 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j\le i\le l \wedge p_i<p_k\}$$

$$V(\emptyset,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum\limits_{j\in J(j,k'+\delta,k')}p_j-d_{k'}\right)\\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum\limits_{j\in J(j,k'+\delta,k)}p_j\right)\end{array}\right),$$

with $k'\in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'}=\max\{p_i \mid i\in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left|\ J\left(\frac{1}{2},1\right]\ \right|+\left\lceil \frac{1}{2}\cdot\left|\ J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\ \right|\right\rceil$$

$$LB=\left\lceil\ \left|\ J\left(\frac{2}{3},1\right]\ \right|+\frac{2}{3}\cdot\left|\ J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\ \right|+\frac{1}{2}\cdot\left|\ J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\ \right|+\frac{1}{3}\cdot\left|\ J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\ \right|\ \right\rceil$$

$$n_{j1}:=LB_1(F_j^*)$$

$$n_{j2}:=\begin{cases} LB_2(F_j^*) & \text{if } p_j\ \ge\ 1/2 \text{ or } LB_2(F_j^*)\notin IN\\ LB_2(F_j^*)-1/2 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$n_{j3}:=\begin{cases} LB_3(F_j^*) & \text{if } p_j\ \ge\ 2/3\\ LB_3(F_j^*)-1/3 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$E_j:=\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum\limits_{h\in P_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \textit{for } j=1,\ldots,N$$

$$L_j(M):=M+1-\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum\limits_{h\in F_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \textit{for } j=1,\ldots,N$$

$$Min_x L_g(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}(c_{i,j}+g_i+g_j)\cdot x_{i,j}-2\cdot\sum_{i=1}^{N}g_i$$

$$UBMT=\max\left\{\left\lfloor p+(C-w)\cdot\frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}}\right\rfloor,\left\lfloor p+p_{b^*}+(C-w-w_{b^*})\cdot\frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}}\right\rfloor\right\}$$

$$\forall i<i^*<j: U^+(i,j)=\min\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1},V^-(i,j-1)+x_j-x_i\}$$

$$\forall i<i^*<j: U^-(i,j)=\min\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i,V^+(i+1,j)+x_j-x_i\}$$