Platz-Nr.:_ ____________

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

****

Klausuraufgaben

Sommersemester 2015

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	22.07.2015
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt **6 (sechs)** Seiten.

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe 1 (Traveling Salesman und Linear Assignment Problem) [24 Punkte]

Wir betrachten folgende Instanz eines symmetrischen TSP:

$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & \infty & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & \infty & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & \infty & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie eine optimale Lösung für das durch obige Matrix gegebene LAP mit Hilfe der ungarischen Methode und geben Sie den errechneten Zielfunktionswert an. Zeigen Sie mit Hilfe einer dualen Lösung die Optimalität Ihrer LAP-Lösung. (10 Punkte)

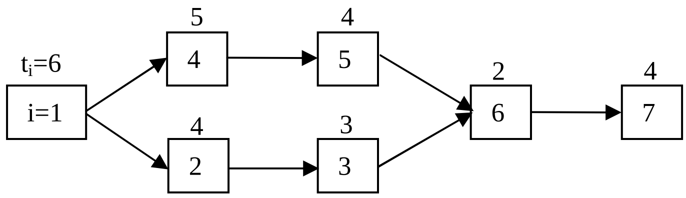
b) Ermitteln Sie für die erste Branching-Entscheidung des Branch & Bound Verfahrens von Little et al. angewendet auf die obige Matrix die Einträge der „K-Matrix“ und interpretieren Sie allgemein deren Aussage. Über welche Variable könnte der nächste Branching Schritt im Verfahren von Little et al. erfolgen? (5 Punkte)

c) Berechnen Sie mit dem Verfahren von Kruskal einen Minimalen Spannbaum für den durch die obige Matrix gegebenen Graphen. (4 Punkte)

d) Konstruieren Sie eine 1-tree Lower Bound für das symmetrische TSP und begründen Sie Ihr Vorgehen. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (SALOME Verfahren für SALBP-1) [23 Punkte]

Betrachten Sie die die nachfolgende Instanz des SALBP-1 mit C = 10, sieben Arbeitsgängen i=1,…,7 und dem folgenden Vorranggraphen.



a) Im SALOME Verfahren wird die Enumerationsrichtung dynamisch bestimmt. Beantworten Sie zu diesem Thema die folgenden Fragen:

i. Was sagt die Maximum station load rule aus? (2 Punkte)

ii. Erzeugen Sie alle möglichen Belegungen für die nächste Station in Vorwärtsrichtung unter Berücksichtigung der Maximum station load rule. (3 Punkte)

iii. Erzeugen Sie alle möglichen Belegungen für die nächste Station in Rückwärtsrichtung unter Berücksichtigung der Maximum station load rule. (3 Punkte)

iv. Welches Ziel wird mit der dynamischen Auswahl der Enumerationsrichtung verfolgt? Welche Richtung würden Sie anhand der gerade erzeugten Stationsbelegungen wählen? (3 Punkte)

b) Konstruieren Sie zwei zulässige Stationsbelegungen für obige Instanz, so dass die eine gemäß der Jackson Dominance Rule von der anderen dominiert wird. Erläutern Sie dazu auch die Dominanzregel selbst. (6 Punkte)

c) Für die Berechnung von unteren Schranken wird im SALOME Verfahren auf verwandte Optimierungsprobleme zurückgegriffen. Beschreiben Sie jeweils kurz das Optimierungsproblem, das den folgenden Schranken zugrunde liegt:

i. LB 4 (3 Punkte)

ii. LB 7 (3 Punkte)

Aufgabe 3 (Cutting-Stock Problem) **[16 Punkte]**

Betrachten Sie das folgende Cutting-Stock Problem mit einer Gesamtbreite der zu verarbeitenden Rollen von $W = 9$.

Final-Typ	**Breite**	**Bedarf**
1	3	28
2	6	10
3	7	5
4	8	5

Die initialen Schnittmuster (Anzahl der jeweils erzeugten Finals) seien durch die folgenden Vektoren gegeben: (3, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) und (0, 0, 0, 1).

a) Geben Sie die optimale Duale Lösung $\boldsymbol{y}$ für die LP-Relaxation des Cutting-Stock Problems an, das nur die initialen Schnittmuster enthält. (4 Punkte)

b) Definieren Sie das Optimierungsproblem für die Erzeugung von Schnittmustern mit minimalen reduzierten Kosten für die hier betrachtete Instanz. (4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die initialen Schnittmuster nicht die optimale Kombination für die LP-Relaxation des Cutting-Stock Problems sind. Geben Sie dazu ein zulässiges Schnittmuster mit negativen reduzierten Kosten an. (4 Punkte)

d) Häufig wird durch Aufrundung der Lösung der LP-Relaxation eine ganzzahlige Lösung eines Cutting-Stock Problems erzeugt. Wie viele Rollen müssen dazu maximal zusätzlich aufgeschnitten werden? Wie lässt sich das begründen?

(4 Punkte)

Aufgabe 4 (Optimierung mit Deadlines) [27 Punkte]

a) Wir betrachten einen Zustand V(S,t) aus dem dynamischen Programmierungsansatz für die Minimierung der Gesamtverspätung in der einstufigen Reihenfolgeplanung (single stage scheduling problem pursuing minimal total tardiness). Definieren Sie die Zustände V(S,t) und geben Sie obere und untere Schranken für den Wert der Differenz $V(S,t + \delta) - V(S,t)$ in Abhängigkeit von $|S|$ und $\delta>0$ an. Beschreiben Sie die Umstände, unter denen diese Schranken tatsächlich angenommen werden. (10 Punkte)

b) Gegeben sei eine Instanz des Line-TSP mit den Knoten 1 bis 9 und 4 sei der Startpunkt. Die von Ihnen getroffenen Aussagen sollen nun für alle möglichen Werte von Deadlines und Abständen gelten:

   i. Was ist die Bedeutung der Zustände V+(i,j) und V-(i,j)? (3 Punkte)

   ii. Gegeben seien die sechs verschiedenen Zustände V+(3,7), V-(2,5), V+(3,9), V-(1,7), V-(3,5) und V-(1,6). Bilden Sie daraus drei Paare von je zwei Zuständen, die vergleichbar sind und setzen Sie diese in Relation (≤ oder ≥) zueinander. Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz! (6 Punkte)

c) Erläutern Sie die Aufgabe und den Zweck der im Ansatz für das CVRPSTW von Taillard et. al. eingesetzten Approximationsfunktion zur Evaluation der enumerierten Lösungen innerhalb der durch den CROSS-Operator definierten Nachbarschaft. (8 Punkte)

Formelsammlung:

$$\forall i < i^* < j : U^-(i,j) = \min\left\{V^-(i+1,j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1,j) + x_j - x_i\right\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i,j) = \min\left\{V^+(i,j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i,j-1) + x_j - x_i\right\}$$

$$J(j,l,k) = \left\{i \middle| j \le i \le l \wedge p_i < p_k\right\}$$

$$V(\emptyset,t) = 0 \text{ and } V(\{j\},t) = \max\left\{0, t + p_j - d_j\right\}$$

$$V(J(j,l,k),t) = \min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k')} p_j - d_{k'}\right) \\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'), t + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right) \end{array}\right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'} = \max\left\{p_i \middle| i \in J(j,l,k)\right\}$

$$C(M) := \max\left\{\sum_{i=0}^{k} t_{k \cdot M+1-i} \middle| k = 1, \ldots, \left\lfloor (N-1)/M \right\rfloor\right\}$$

$$LB_7 := \min\left\{M \middle| C(M) \le C\right\}$$

$$\text{Minimize } Z = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_i^j \cdot x_j \ge b_i, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

$$x_j \ge 0 \wedge \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \text{with } \sum_{i=1}^{m} a_i^j \cdot w_i \le W, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$