Platz-Nr.: _______

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Sommersemester 2021

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	07.09.2021
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der fünf gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **6** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Seeplanung) **[26 Punkte]**

Die Stadtplanerin Annagreta Eulenerpel hat den Auftrag, den örtlichen See für den Tourismus attraktiver zu gestalten. Um den kreisförmigen See herum sollen die Plätze der Menge $P =$ {Hundestrand (HS), Familienstrand (FS), FKK-Strand (FKK), Bootsanlegestelle (BA), Wasserski-Station (WS)} angelegt werden. Durch eine Umfrage wurde festgestellt, dass durch einige Kombinationen von benachbarten Plätzen Unbehagen entsteht. Alle Plätze sollen angelegt werden. Zwei Plätze sind benachbart, wenn zwischen ihnen kein anderer Platz angelegt wurde. Das Gesamtunbehagen soll minimiert werden. Dieses Problem wird als das See-Problem bezeichnet. Das Maß des Unbehagens, falls zwei Plätze benachbart sind ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	HS	FS	FKK	BA	WS
HS	∞	12	10	8	9
FS		∞	7	6	4
FKK			∞	3	5
BA				∞	9
WS					∞

a) Um welches aus der Vorlesung bekannte Optimierungsproblem handelt es sich? Gehen Sie auf die Nebenbedingungen und auf die Zielfunktion ein. (7 Punkte)

b) Betrachtet wird das folgende Optimierungsproblem (See-2-Problem):
Seien die Plätze $P = \{HS, FS, FKK, BA, WS\}$ und beliebig viele Seen gegeben. Gesucht wird eine Zuordnung der Plätze zu den Seen und jeweils ein Standortplan der Plätze, sodass dies zu minimalen Gesamtunbehagen führt. Zwei Plätze, die unterschiedlichen Seen zugeordnet werden, sind niemals benachbart. Werden einem See genau zwei Plätze zugeordnet, so verdoppelt sich das Unbehagen für diesen See.

   i. Begründen Sie, warum einem See, dem mindestens ein Platz zugeordnet wird, in einer optimalen Lösung mindestens zwei Plätze zugeordnet werden. (4 Punkte)

   ii. Begründen Sie, warum eine optimale Lösung des See-2-Problems eine untere Schranke für das See-Problem ist. (5 Punkte)

   iii. Ermitteln Sie eine optimale Lösung für das See-2-Problem. (10 Punkte)

Aufgabe 2 (Cutting-Stock Problem) **[18 Punkte]**

Sei das folgende Cutting-Stock Problem mit der Rollenweite $\boldsymbol{W = 14}$ mit den folgenden Finals gegeben:

Finaltyp	1	2	3	4
Länge w_i	1	10	3	4
Anzahl b_i	32	8	18	4

a) Zeigen Sie mithilfe der dualen Lösung, dass die ausschließliche Verwendung der Schnittmuster

$$\begin{pmatrix}2\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

zu einer optimalen Lösung für die LP-Relaxierung dieses Problems führt. (14 Punkte)

b) Warum führt diese Schnittmusterkombination sogar zu einer optimalen Lösung für das Cutting-Stock Problem? (4 Punkte)

Aufgabe 3 (Line-TSP) **[15 Punkte]**

Es sei die folgende Instanz mit 6 Kunden eines Line-TSP Problems gegeben:

Kunde i	1	2	3	4	5	6
Ort x_i Kunde i	0	2	5	7	10	13
Deadline d_i Kunde i	36	6	0	16	20	28

Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs beträgt $v = 1$.

a) Definieren Sie die Zustände $V^+(i,j)$ und $V^-(i,j)$. (5 Punkte)

b) Welcher Kunde muss der Startkunde i^* sein, damit überhaupt zulässige Lösungen möglich sind? Begründen Sie Ihre Wahl. (2 Punkte)

c) Ermitteln Sie mithilfe der dynamischen Programmierung $V^+(2,5)$ und geben Sie die Kundenreihenfolge an. (8 Punkte)

Aufgabe 4 (1-Maschinen-Scheduling) **[19 Punkte]**

Sei ein 1-Maschinen-Scheduling Problem mit dem Ziel der Minimierung der Gesamtverspätung mit 5 Aufträgen gegeben. Die Parameter sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Job	1	2	3	4	5
Prozesszeit p_i	1	5	10	6	11
Duedate d_i	4	10	12	14	15

a) Definieren Sie den Zustand $V(S, t)$. (4 Punkte)

b) Ermitteln Sie mithilfe der dynamischen Programmierung eine optimale Lösung. (7 Punkte)

c) Widerlegen Sie die folgende Aussage anhand eines Beispiels:
Sei ein 1-Maschinen-Scheduling-Problem mit der Auftragsmenge A und ein optimaler Schedule für dieses Problem gegeben. Wird nun ein Auftrag k aus diesem Schedule entfernt, so ist dieser Schedule optimal für das Problem mit Auftragsmenge $A\setminus\{k\}$. (8 Punkte)

Aufgabe 5 (Simulated Annealing) **[12 Punkte]**

Sei ein QAP mit drei Elementen 1,2,3 und drei Orten a,b,c gegeben mit der Distanzmatrix A und der Flussmatrix B:

Distanzmatrix			
Ort	a	b	c
a	-	4	3
b	2	-	1
c	4	3	-

Flussmatrix			
Element	1	2	3
1	-	1	5
2	3	-	2
3	4	2	-

a) Berechnen Sie den Zielfunktionswert der Zuordnung (b, a, c), also $1 \mapsto b, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c$. (5 Punkte)

b) Es wird nun das Verfahren Simulated Annealing angewendet. Die Nachbarschaft einer Lösung l besteht aus allen Lösungen, die durch Vertauschung zweier Elemente von l entstehen. Die folgende Tabelle (nächste Seite) enthält die Zielfunktionswerte aller weiteren Permutationen:

Lösung	(a, b, c)	(a, c, b)	(b, c, a)	(c, b, a)	(c, a, b)
Zielfunktionswert	49	51	50	50	48

Sei $S_0 = (b, a, c)$. Bestimmen Sie die kleinste positive ganzzahlige Temperatur, sodass nicht alle Nachbarlösungen für die Zufallsvariable $X = 0{,}5$ übernommen werden würden. (7 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k) = \{ i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k \}$$

$$V(\varnothing,t) = 0 \text{ and } V(\{j\},t) = \max\{0, t + p_j - d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t) = \min_{\delta} \left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k')} p_j - d_{k'}\right) \\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'), t + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right) \end{array} \right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}$

$$LB = \left| J\left(\frac{1}{2},1\right] \right| + \left\lceil \frac{1}{2} \cdot \left| J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \right| \right\rceil$$

$$LB = \left\lceil \left| J\left(\frac{2}{3},1\right] \right| + \frac{2}{3} \cdot \left| J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right] \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \right| + \frac{1}{3} \cdot \left| J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] \right| \right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M) = \max\left\{ \sum_{i=0}^{k} t_{k \cdot M+1-i} : \mathrm{k} \in \left\{1,\ldots,\left\lfloor \frac{N-1}{M} \right\rfloor\right\}\right\}$$

$$LB = \min\{M : C(M) \le C\}$$

$$E_j := \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in P_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad for\ j = 1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M + 1 - \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in F_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad for\ j = 1,\ldots,N$$

$$If\ x < e^{-\frac{\Delta}{t}}, then\ S_0 = S$$

$$UBMT = \max\left\{ \left\lfloor p + (C - w) \cdot \frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}} \right\rfloor, \left\lfloor p + p_{b^*} + (C - w - w_{b^*}) \cdot \frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}} \right\rfloor \right\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i,j) = \min\{V^+(i,j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i,j-1) + x_j - x_i\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i,j) = \min\{V^-(i+1,j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1,j) + x_j - x_i\}$$