Platz-Nr.: _______

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Sommersemester 2022

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	21.07.2022
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **6** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Line-TSP) **[20 Punkte]**

Es sei die folgende Instanz mit 6 Kunden eines Line-TSP Problems gegeben:

Kunde i	1	2	3	4	5	6
Ort x_i Kunde i	0	6	8	15	18	23
Deadline d_i Kunde i	56	31	8	0	20	62

Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs beträgt $v = 1$.

a) Definieren Sie die Zustände $V^{+}(i, j)$ und $V^{-}(i, j)$. (5 Punkte)

b) Welcher Kunde muss der Startkunde i^{*} sein, damit überhaupt zulässige Lösungen möglich sind? Begründen Sie Ihre Wahl. (2 Punkte)

c) Ermitteln Sie mit Hilfe der dynamischen Programmierung $V^{-}(2,5)$ und geben Sie die Kundenreihenfolge an. (8 Punkte)

d) Sei eine optimale Lösung für eine Instanz mit Deadlines gegeben. Nehmen Sie Stellung zur folgenden Behauptung: „Werden nun Release Dates (Freigabezeitpunkte) hinzugefügt und die gegebene Lösung besitzt auch nach dieser Ergänzung keine Wartezeiten und ist weiterhin zulässig, so ist diese Lösung auch für die neue Problemstellung optimal.“ (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Stahlprodukte) **[32 Punkte]**

Zu produzieren sind eine Anzahl b_i von Stahlrohren vom Produkttyp $\boldsymbol{i}$ mit jeweiligen Längen w_i und verschiedenen Legierungen L_1 oder L_2. Diese Daten können Sie der folgenden Tabelle entnehmen:

Produkttyp	1	2	3	4
Länge w_i	3	7	6	4
Anzahl b_i	22	18	8	50
Legierungstyp	L_1/L_2	L_1	L_1	L_1/L_2

Hierbei können also Produkttyp 1 und 4 sowohl aus der Legierung L_1, als auch aus der Legierung L_2 bestehen. Für die Produkttypen 2 und 3 muss Stahl der Legierungsart L_1 genutzt werden.

Diese Produkte sollen aus längeren Stahlrohren geschnitten werden. Sowohl für L_1, als auch L_2 haben diese eine Länge von $W = 22$. Die Kosten für ein Stahlrohr dieser Länge für L_1 betragen 2 und die Kosten für L_2 betragen 1. Das Ziel ist die Minimierung der Kosten.

a) Dieses Problem ähnelt dem Cutting Stock Problem, es liegen jedoch Unterschiede vor. Beschreiben Sie diese Unterschiede. Gehen Sie dazu auf die Zielfunktion ein. Wie sind zulässige Schnittmuster für dieses Problem definiert? (8 Punkte)

b) Es liegt nun eine Basislösung vor. Die Spalten zu den Basisvariablen sind die folgenden:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Schnittmuster bestehen aus der Legierung L_1 und die übrigen aus Legierung L_2.

i. Bestimmen Sie die duale Lösung. (9 Punkte)

ii. Ermitteln Sie ein Schnittmuster vom Legierungstyp L_1 mit negativen reduzierten Kosten. (Falls Sie keine Lösung in i. gefunden haben, nutzen Sie die duale Lösung $\pi^T = \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.) (9 Punkte)

iii. Geben Sie das Pricing Problem für Schnittmuster vom Legierungstyp L_2 an. (Falls Sie keine Lösung in i. gefunden haben, nutzen Sie die duale Lösung $\pi^T = \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.) (6 Punkte)

Aufgabe 3 (Lagrange-Relaxation) **[23 Punkte]**

Sei die folgende symmetrische Kostenmatrix für ein TSP mit 5 Knoten gegeben:

Knoten	1	2	3	4	5
1	-	3	6	∞	10
2		-	7	5	4
3			-	8	∞
4				-	9
5					-

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie eine untere Schranke $L_g(x)$, indem Sie die Lagrange-Relaxierung heranziehen mit Multiplier $g_i^1 = 0$ für alle $i \in \{1,2,3,4,5\}$ und für den ausgezeichneten Knoten $s = 5$. (7 Punkte)

c) Berechnen Sie eine obere Schranke Z^{up}, indem Sie den Zielfunktionswert der Tour (1,3,4,2,5,1) bestimmen. (2 Punkte)

d) Ausgehend von der in b) ermittelten Lösung bestimmen Sie nun die neuen Multiplier für die Schrittweite $\delta^1 = \frac{Z^{up} - L_g(x)}{\sum_{i=1}^{5}\left(d_i\left(T(g)\right)-2\right)^2}$ und dem Subgradienten $d\left(T(g)\right) - 2$. (4 Punkte)

e) Bestimmen Sie für die in d) ermittelten Multiplier und dem ausgezeichneten Knoten $s = 5$ den Zielfunktionswert der Lagrange-Relaxation. Ist das Ursprungsproblem bereits optimal gelöst? (6 Punkte)

Aufgabe 4 (DP für TSP) **[15 Punkte]**

Es liegt das TSP mit 6 Kunden, Zeitfenstern $[a_i, b_i]$, Reisezeiten $t_{i,j}$, Servicezeiten s_i und Kosten $c_{i,j}$ für alle Kunden (Knoten) i, j vor. Unter anderem liegen die folgenden Parameter vor:

Servicezeiten: $s_2 = 4,\ s_3 = 3,\ s_4 = 3,\ s_5 = 1$

Reisezeiten: $t_{2,4} = 16,\ t_{3,4} = 20,\ t_{5,4} = 4,\ t_{2,6} = 26$

Kosten: $c_{2,4} = 2,\ c_{3,4} = 4,\ c_{5,4} = 1$

Zeitfenster: $a_4 = 22,\ b_4 = 55,\ b_6 = 53$

Sei $S = \{1,2,3,5\}$ und Kunde 1 der Startkunde. Für S liegen aktuell die folgenden Zustände vor, dabei bezeichnet (S, i) die Menge der Zustände, mit einem Pfad von 1 nach i, wobei alle Kunden aus S besucht wurden. Der nachfolgenden Tabelle lassen sich die zulässigen Zustände $(t, F(S, i, t))$ entnehmen:

i	2	3	5
$(t, F(S, i, t))$	$(24,20), (26,19), (27,19)$	$(33,25), (30,24)$	$(40,18), (42,32)$

a) Ergänzen Sie in einem weiteren Schritt alle Pareto-optimalen Teillösungen der obigen Tabelle um den Endort $i = 4$ unter Verwendung des in der Vorlesung vorgestellten Dynamic-Programming Ansatzes (ohne Anwendung der Post-Feasibility-Tests).

(10 Punkte)

b) Die Reisezeiten erfüllen die Dreiecksungleichung. Begründen Sie mithilfe des Post Feasibility Test 1, dass $(S, 2, t)$ nicht hätte erweitert werden müssen für alle $t \in [a_2, b_2]$. (5 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k) = \{ i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k \}$$

$$V(\emptyset,t) = 0 \text{ and } V(\{j\},t) = \max\{0, t + p_j - d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t) = \min_{\delta} \left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k')} p_j - d_{k'}\right) \\ + V\left(J(k'+\delta+1,l,k'), t + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right) \end{array} \right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}$

$$LB = \left| J\left(\frac{1}{2},1\right] \right| + \left\lceil \frac{1}{2} \cdot \left| J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \right| \right\rceil$$

$$LB = \left\lceil \left| J\left(\frac{2}{3},1\right] \right| + \frac{2}{3} \cdot \left| J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right] \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \right| + \frac{1}{3} \cdot \left| J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] \right| \right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M) = \max\left\{ \sum_{i=0}^{k} t_{k \cdot M+1-i} : \mathrm{k} \in \left\{1,\ldots,\left\lfloor \frac{N-1}{M} \right\rfloor\right\}\right\}$$

$$LB = \min\{M : E_j \le L_j(M) \text{ for all } j = 1,\ldots,N\}$$

$$E_j := \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in P_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad \text{for } j = 1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M + 1 - \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in F_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad \text{for } j = 1,\ldots,N$$

$$g^{j+1} = g^j + \delta^j (d(T(g)) - 2)$$

$$FIRST(S,i) + s_i > \min_{j \notin S} LDT(i,j)$$

$$F(S,j,t) = \min_{(i,j) \in A, i \in S \setminus \{j\}} \{F(S \setminus \{j\}, i, t') + c_{i,j} : t \ge t' + s_i + t_{i,j}, a_i \le t' \le b_i\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i,j) = \min\{V^+(i,j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i,j-1) + x_j - x_i\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i,j) = \min\{V^-(i+1,j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1,j) + x_j - x_i\}$$