Platz-Nr.: _______

Name: _________________________ Vorname: _______________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2022/2023

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	20.03.2023
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (1-Maschinen-Scheduling) **[17 Punkte]**

Sei ein 1-Maschinen-Scheduling Problem mit dem Ziel der Minimierung der Gesamtverspätung mit 5 Aufträgen und den folgenden Parametern gegeben:

Job i	1	2	3	4	5
Prozesszeit p_i	7	6	12	14	11
Fälligkeit d_i	9	12	16	20	26

a) Definieren Sie den Zustand $V(S, t)$. (4 Punkte)

b) Ermitteln Sie mithilfe der dynamischen Programmierung eine optimale Lösung. (8 Punkte)

c) Nehmen Sie Stellung zur folgenden Behauptung*: Ist die Summe der ganzzahligen Prozesszeiten nicht größer als* $67n^4 + 10n^3 + 12$, *wobei* n *die Anzahl der Jobs ist, so ist das Problem polynomiell lösbar.* (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Knapsack-Problem) **[24 Punkte]**

Sei das 0-1-Knapsack-Problem mit n Gegenständen, Nutzen p_j und Gewicht w_j für alle Gegenstände $j \in \{1, \dots, n\}$ und Kapazität C gegeben.

a) Erstellen Sie für den allgemeinen Fall das ganzzahlige lineare Programm. (5 Punkte)

b) Wir nehmen an, dass k das kritische Gut ist. Zeigen Sie allgemein, dass für den Multiplier p_k/w_k der optimale Zielfunktionswert der Lagrange Relaxierung dem optimalen Zielfunktionswert der LP-Relaxierung entspricht. (10 Punkte)

c) Finden Sie mithilfe des B&B-Verfahrens eine optimale Lösung für die nachfolgende Instanz mit $C = 25$. Verzweigen Sie über das kritische Gut und wenden Sie die Bestensuche an. Für die Berechnung der Schranken nutzen Sie die LP-Relaxierung als obere Schranke und als untere Schranke Zielfunktionswerte fertiger zulässiger Lösungen im Baum.

Gegenstand i	1	2	3	4	5	6
Nutzen p_i	36	9	45	32	6	49
Gewicht w_i	6	3	9	8	3	7

(9 Punkte)

Aufgabe 3 (Traveling Salesman Problem) **[21 Punkte]**

Betrachtet wird die folgende Instanz des symmetrischen Traveling Salesman Problem mit 6 Knoten.

$$\begin{pmatrix} \infty & 10 & \infty & \infty & 6 & 7 \\ & \infty & 9 & 3 & 9 & \infty \\ & & \infty & 5 & \infty & \infty \\ & & & \infty & 10 & \infty \\ & & & & \infty & 10 \\ & & & & & \infty \end{pmatrix}$$

a) Welches Problem wird durch die Ungarische Methode (Hungarian Method) optimal gelöst? In welchem Verhältnis steht der Zielfunktionswert der durch die ungarische Methode ermittelten Lösung zum sTSP? Begründen Sie Ihre Antwort! (8 Punkte)

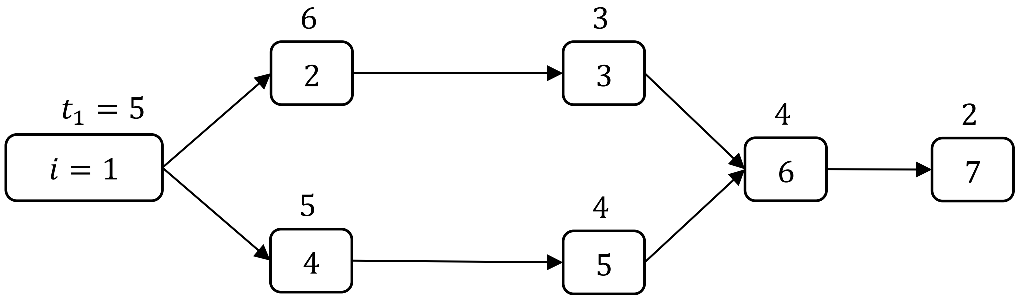
b) Berechnen Sie für den ausgezeichneten Knoten $s = 2$ einen 1-Baum (1-tree). (6 Punkte)

c) Nehmen Sie zur folgenden Behauptung Stellung: *Sei eine Instanz für das sTSP gegeben, auf das sowohl die Ungarische Methode* (Hungarian Method) *angewendet wird, als auch ein 1-Baum (1-tree) ermittelt wird. Sind beide Lösungen (nicht nur die Zielfunktionswerte) identisch, so liegt eine optimale TSP-Tour vor.* (7 Punkte)

(auf der nächsten Seite geht es weiter)

Aufgabe 4 (SALOME) **[28 Punkte]**

Sei eine Instanz des SALBP-1 mit einer Taktzeit von $C = 10$ und $n = 7$ Aufträgen mit den folgenden Vorrangbeziehungen und Prozesszeiten t_i gegeben:



a) Bestimmen Sie alle möglichen Belegungen unter Anwendung der Maximum Station Load Rule für die vorwärtsgerichtete Enumeration, als auch für die rückwärtsgerichtete Enumeration für die erste bzw. letzte Station. (6 Punkte)

b) Welchen Zweck erfüllt die dynamische Wahl der Enumerationsrichtung? Welche Wahl würden Sie diesbezüglich in a) treffen? (5 Punkte)

c) Nun wird ausschließlich die vorwärtsgerichtete Enumeration angewendet. Zeigen Sie mithilfe der Labeling Dominance Rule, dass die Erweiterung von Teillösung x um die Aufträge 3, 6 und 7 und die Erweiterung von Teillösung y um die Aufträge 5, 6 und 7 die gleichen Aufträge berücksichtigt haben. Es gilt $L(x) = 8$ und $L(y) = 6$. (6 Punkte)

d) Sei die folgende Teillösung gegeben: In der ersten Station befinden sich die Aufträge 1 und 4, in der zweiten Station befinden sich die Aufträge 2 und 3.
Geben Sie eine zulässige Teillösung an, sodass Ihre Lösung die hier angegebene gemäß der Jackson Dominance Rule dominiert. (5 Punkte)

e) Bestimmen Sie die LB_5 für obige Instanz. Für die Berechnung einer Schranke für die früheste Station E_j und späteste Station $L_j(M)$ eines Auftrags j wird die einfache Variante eingesetzt (LB_1). (6 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j\le i\le l \wedge p_i<p_k\}$$

$$V(\emptyset,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum\limits_{j\in J(j,k'+\delta,k')}p_j-d_{k'}\right)\\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum\limits_{j\in J(j,k'+\delta,k)}p_j\right)\end{array}\right),$$

with $k'\in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'}=\max\{p_i \mid i\in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left\lceil \left|J\left(\frac{1}{2},1\right]\right| + \left\lceil \frac{1}{2}\cdot\left|J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right|\right\rceil\right\rceil$$

$$LB=\left\lceil \left|J\left(\frac{2}{3},1\right]\right| + \frac{2}{3}\cdot\left|J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\right| + \frac{1}{2}\cdot\left|J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right| + \frac{1}{3}\cdot\left|J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\right|\right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M)=\max\left\{\sum_{i=0}^{k}t_{k\cdot M+1-i} : \mathrm{k}\in\left\{1,\ldots,\left\lfloor\frac{N-1}{M}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$LB=\min\{M : C(M)\le C\}$$

$$E_j := \left\lceil \frac{\left(t_j+\sum\limits_{h\in P_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M+1-\left\lceil \frac{\left(t_j+\sum\limits_{h\in F_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$LB=\min\{M \mid L_j(M)\ge E_j \forall j\}$$

$$L(j)=\sum_{k\in\{h \mid h<j,\, h\notin P_j^*\}}L(k)+1$$

$$UBMT=\max\left\{\left\lfloor p+(C-w)\cdot\frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}}\right\rfloor,\left\lfloor p+p_{b^*}+(C-w-w_{b^*})\cdot\frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}}\right\rfloor\right\}$$

$$\forall i<i^*<j : U^+(i,j)=\min\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1},V^-(i,j-1)+x_j-x_i\}$$

$$\forall i<i^*<j : U^-(i,j)=\min\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i,V^+(i+1,j)+x_j-x_i\}$$