

Platz-Nr.: \_\_\_\_\_  
Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

**BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL**  
**FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS**

**Master of Science**

---

**Sommersemester 2023**

Prüfungsgebiet: MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management  
Tag der Prüfung: 26.07.2023  
Name des Prüfers: Prof. Dr. Bock  
Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar)

---

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1 (Scheduling)****[19 Punkte]**

Wir betrachten das Ein-Maschinen-Scheduling Problem mit dem Ziel der Minimierung der Gesamtverspätung. Gegeben sind dazu die folgenden Daten:

|                 |    |    |    |    |    |    |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|
| Auftrag         | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Prozesszeit $p$ | 5  | 8  | 10 | 7  | 4  | 7  |
| Fälligkeit $d$  | 12 | 15 | 20 | 24 | 26 | 30 |

- Bestimmen Sie die Gesamtverspätung des verzögerungsfreien (non-delay) Schedules  $s = (1,2,3,4,5)$ . (3 Punkte)
- Definieren Sie die Zustände  $V(S, t)$  im Ansatz der Dynamischen Programmierung von Lawler. (3 Punkte)
- Welche Vorrangbeziehungen zwischen den Aufträgen können Sie zur Minimierung der Gesamtverspätung durch das Dominanzkriterium von Emmons ableiten? (3 Punkte)
- Warum muss der Zustand  $V(\{1,2,5,6\}, t)$  im Ansatz der Dynamischen Programmierung von Lawler für keinen Wert  $t$  ermittelt werden? (4 Punkte)
- Für welche Werte von  $t$  muss der Zustand  $V(\{4,5,6\}, t)$  bei Anwendung des Ansatzes der Dynamischen Programmierung von Lawler ausgewertet werden? (6 Punkte)

**Aufgabe 2 (Knapsack Problem)****[17 Punkte]**

Betrachtet wird das 0-1-Knapsack Problem mit 5 Gütern und einer Kapazität von  $C = 20$ . Die Preise und Gewichte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen

|               |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|
| Gut $i$       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Preis $p_i$   | 2 | 4 | 5 | 8 | 6 |
| Gewicht $w_i$ | 3 | 6 | 9 | 7 | 7 |

- Geben Sie das mathematische Modell an. (4 Punkte)
- Ermitteln Sie eine optimale Lösung der LP-Relaxierung. (5 Punkte)
- Begründen Sie, warum sich der Rechenaufwand des Lösungsansatzes der Dynamischen Programmierung für das Knapsack Problem durch  $k \cdot C \cdot n$  viele Rechenschritte beschränken lässt ( $k$  ist eine geeignete Konstante) und erläutern Sie in diesem Zusammenhang, warum dieser Ansatz trotzdem nicht polynomiell, sondern *pseudo-polynomiell* ist. (8 Punkte)

**Aufgabe 3 (Cutting Stock Variante)****[33 Punkte]**

Zu produzieren ist eine Stückzahl von  $b_i$  vom Produkttyp  $i$  mit jeweiligen Längen  $w_i$ , die aus Rollen der Länge 100cm oder 200cm geschnitten werden können. Rollen der Länge 100cm weisen Kosten von 10GE auf und Rollen der Länge 200cm weisen Kosten von 24GE auf. Die Kosten sind zu minimieren. Die benötigte Stückzahl und Längen der Produkttypen sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen:

|                   |    |    |    |
|-------------------|----|----|----|
| Produkttyp        | 1  | 2  | 3  |
| Länge $w_i$ in cm | 80 | 60 | 50 |
| Anzahl $b_i$      | 20 | 30 | 40 |

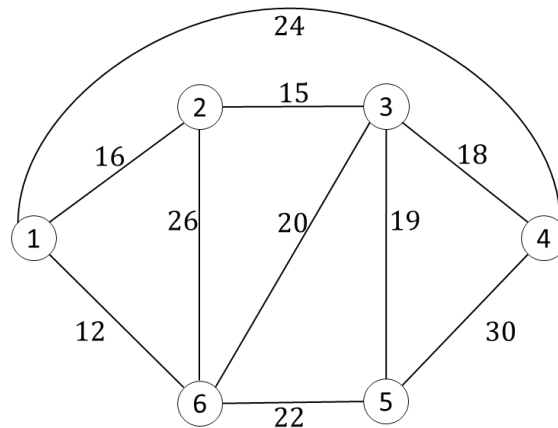
- a) Dieses Problem ähnelt dem Cutting Stock Problem, es liegen jedoch Unterschiede vor. Beschreiben Sie diese Unterschiede. Gehen Sie dazu auf die Zielfunktion ein. Wie sind zulässige Schnittmuster für dieses Problem definiert? (6 Punkte)
- b) Es liegt nun eine Basislösung der LP-Relaxierung vor. Die Spalten zu den Basisvariablen sind die folgenden, welche alle zu zulässigen Schnittmustern korrespondieren (hierbei werden immer die kostengünstigsten Rollen verwendet, sodass das Schnittmuster zulässig ist):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- i. Bestimmen Sie die duale Lösung. (6 Punkte)
- ii. Skizzieren Sie ein mögliches Pricing Problem, das das Schnittmuster mit den geringsten reduzierten Kosten ermittelt. (10 Punkte)
- iii. Geben Sie ein Schnittmuster mit den zugehörigen reduzierten Kosten an, welches zur Verbesserung der aktuellen Basislösung herangezogen werden könnte. (6 Punkte)
- c) Betrachten Sie das obige Cutting Stock Problem bei ausschließlicher Berücksichtigung von Rollen der Länge 100cm. Bestimmen Sie eine untere Schranke für den Zielfunktionswert dieses Problems mit Hilfe der  $LB_2$ . (5 Punkte)

**Aufgabe 4 (Bounds für das TSP)****[21 Punkte]**

a) Sei die folgende sTSP-Instanz mit 6 Knoten gegeben:



Bestimmen Sie eine untere Schranke  $L_g(x)$ , indem Sie die Lagrange-Relaxierung heranziehen mit Multiplier  $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6) = (6, 0, -5, 0, 0, 0)$  und für den ausgezeichneten Knoten  $s = 4$ . (7 Punkte)

b) Zeigen oder widerlegen Sie mithilfe eines Gegenbeispiels die folgenden Behauptungen:

- i. *Wir betrachten ein Optimierungsproblem mit der Zielfunktion  $\min c^T x$  und den schwierigen Nebenbedingungen  $A_1 x = b_1$  sowie den einfachen Nebenbedingungen  $A_2 x \leq b_2$ . Dann ist die Lagrange Relaxierung für alle Multiplier (also auch für negative) eine untere Schranke für das ursprüngliche Problem. (6 Punkte)*
- ii. *Sei eine aTSP Instanz mit  $n$  Knoten gegeben, bei der die Summe der Kosten der genutzten Kanten minimiert werden soll und die Kosten aller Kanten im Intervall  $[c, c + \epsilon]$  liegen. Sei darüber hinaus eine optimale Lösung des zugehörigen LAP (d.h. mit gleicher Kostenmatrix und mit  $c_{i,i} = \infty, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) und Zielfunktionswert  $z$  gegeben. Dann liegt der Zielfunktionswert einer optimalen TSP Tour nicht über  $z + \epsilon n$ . (8 Punkte)*

**Formeln:**

$$\begin{aligned}
 J(j,l,k) &= \{i \mid j \leq i \leq l \wedge p_i < p_k\} \\
 V(\emptyset, t) &= 0 \text{ and } V(\{j\}, t) = \max\{0, t + p_j - d_j\} \\
 V(J(j,l,k), t) &= \min_{\delta} \left( \begin{aligned} &V(J(j, k' + \delta, k'), t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k')} p_j - d_{k'}\right) \\ &+ V\left(J(k' + \delta + 1, l, k'), t + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k)} p_j\right) \end{aligned} \right), \\
 \text{with } k' \in J(j,l,k) & \text{ is such that } p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 LB &= \left\lfloor J\left(\frac{1}{2}, 1\right) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor J\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\rfloor \right\rfloor \\
 LB &= \left\lfloor \left\lfloor J\left(\frac{2}{3}, 1\right) \right\rfloor + \frac{2}{3} \cdot \left\lfloor J\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \right\rfloor + \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor J\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\rfloor + \frac{1}{3} \cdot \left\lfloor J\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \right\rfloor \right\rfloor \\
 C(M) &= \max \left\{ \sum_{i=0}^k t_{k-M+1-i} : k \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{M} \right\rfloor\right\} \right\} \\
 LB &= \min \{M : C(M) \leq C\} \\
 E_j &:= \left\lfloor \frac{\left( t_j + \sum_{h \in P_j^*} t_h \right)}{C} \right\rfloor \quad \text{for } j = 1, \dots, N \\
 L_j(M) &:= M + 1 - \left\lfloor \frac{\left( t_j + \sum_{h \in F_j} t_h \right)}{C} \right\rfloor \quad \text{for } j = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

$$\text{if } x < e^{-\frac{\Delta}{t}}, \text{ then } S_0 = S$$

$$UBMT = \max \left\{ \left\lfloor p + (C - w) \cdot \frac{p_{b^{*+1}}}{w_{b^{*+1}}} \right\rfloor, \left\lfloor p + p_{b^*} + (C - w - w_{b^*}) \cdot \frac{p_{b^{*-1}}}{w_{b^{*-1}}} \right\rfloor \right\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i, j) = \min \{V^+(i, j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i, j-1) + x_j - x_i\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i, j) = \min \{V^-(i+1, j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1, j) + x_j - x_i\}$$