Platz-Nr.: _______

Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Sommersemester 2024

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	12.08.2024
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der fünf gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **6** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Rémys Restaurant Teil 1) **[30 Punkte]**

Chefkoch Rémy arbeitet in einer Sterneküche und will seine Gäste nicht lange auf die Köstlichkeiten warten lassen. Dafür möchte er Aufgaben stationsweise unter Zeitzwang bearbeiten lassen, wobei an jeder Station genau ein Koch tätig ist. Die Anzahl der benötigten Köche soll minimiert werden. Die folgenden Zubereitungsaufgaben (Tasks) müssen alle erledigt werden und es sind bei der Zuteilung zu einer Station die angegebenen Beschränkungen bezüglich der Reihenfolge zu beachten. Die maximale Bearbeitungszeit an einer Station soll zunächst eine Minute betragen.

Nr.	**Task**	**Dauer [s]**	**Vorgänger**
1	Gemüse blanchieren	30	/
2	Gemüse würzen	20	1
3	Jus anlegen	40	1,2
4	Fisch anbraten	20	3
5	Sauce abschmecken	30	3
6	Sauce andicken	10	3
7	Sauce hinzufügen	30	5,6
8	Anrichten	40	4,7

a) Welche Problemstellung mit welcher Zielsetzung wird hier betrachtet? (2 Punkte)

b) Stellen Sie den Vorranggraphen des Problems auf. (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie LB_1 und LB_2 für das vorliegende Problem. (4 Punkte)

d) Finden Sie eine optimale Lösung für das vorliegende Problem mit Hilfe einer systematischen Enumeration des Lösungsraums. Verwenden Sie hierzu das auf der LLB beruhende Enumerationsschema des SALOME Verfahrens in der Weise, dass Sie lediglich die Maximum Station Load Rule und die LB_1 verwenden. Erzeugen Sie die Stationsladungen in lexikografischer Reihenfolge (z.B. {1,2} vor {1,3} und {2,3} vor {4,5}). (12 Punkte)

e) Wie verändert sich das Lösungsverfahren in Aufgabenteil d), wenn wir statt der LLB-Enumeration nun auf Best-First-Search (BFS) umstellen? (4 Punkte)

f) Rémy erhält die Nachricht, dass, aufgrund von Krankheit, nur noch drei Köche an einem betrachteten Abend zur Verfügung stehen. Weiterhin soll jeder dieser drei Köche an genau einer Station arbeiten, wobei Rémy nun eine möglichst kurze Bearbeitungszeit an jeder Station anstrebt. Beschreiben Sie das nun zu betrachtende Optimierungsproblem und gehen Sie dabei auf die Zielfunktion ein. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (Rémys Restaurant Teil 2) **[17 Punkte]**

Der namhafte Kritiker Anton Ego hat sich angekündigt. Ihn will Rémy keinesfalls länger als nötig warten lassen, weshalb das von ihm bestellte Gericht kleinschrittig aufgeschlüsselt wird. Die untenstehende Tabelle enthält die Vorbereitungszeiten a_i, die eigentliche Verwendungszeiten p_i sowie die Nachbereitungszeiten q_i für die einzelnen Zutaten. Vorbereitung und Nachbereitung können für alle Zutaten parallel durch andere Köche erfolgen, während die eigentliche Verwendung exklusiv durch Rémy durchgeführt wird. Hierbei kann er sich immer nur – ohne Unterbrechung – um eine Zutat kümmern.

Ratatouille				
Nr.	**Zutat**	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{p_i}$	$\boldsymbol{q_i}$
1	Tomate	2	1	0
2	Zwiebeln	8	4	8
3	Kräuter & Knoblauch	3	5	9
4	Aubergine	18	3	2
5	Zucchini	3	3	4

a) Welches Scheduling Problem mit welcher Zielsetzung liegt hier vor? (3 Punkte)

b) Finden Sie mit dem Schrage-Algorithmus eine Lösung σ für obiges Scheduling-Problem. Bestimmen Sie den Critical Path und den Critical Job für diese Lösung. Ist σ eine optimale Lösung? Falls ja, geben Sie den optimalen Zielfunktionswert an. Falls nein, geben Sie die nächste Verzweigung des Branch&Bound-Verfahrens von Carlier an. (10 Punkte)

c) Chef Linguini möchte, dass auch die Zutat Nr. 6 „Schmoren“ (mit Parametern a_6, p_6, q_6) in den Plan aufgenommen wird. Rémy weist ihn darauf hin, dass alle bisherigen Jobs **vor** Job 6 eingeplant werden müssen. Wie lässt Sie die Einhaltung dieser Restriktionen bei Verwendung des Branch&Bound-Verfahrens von Carlier nur durch Modifikation der Parameter realisieren? (4 Punkte)

Aufgabe 3 (Rémys Restaurant Teil 3) **[15 Punkte]**

Leider ist Rémy nach schlechter Kritik gefeuert worden und arbeitet jetzt in der Systemgastronomie bei McBurger. Dort soll alles perfekt dem Workflow angepasst werden. Es sollen der Grill (Station 1), die Fritteuse (Station 2), die Eismaschine (Station 3) und der Kühlraum (Station 4) so zu vier vorgegebenen Standorten zugeordnet werden, dass, aufgrund der gefundenen Anordnung, die Beschäftigten der Gaststätte möglichst wenig laufen müssen, um den Austausch zwischen den Stationen zu erledigen.

a) Um welches in der Vorlesung behandelte Optimierungsproblem handelt es sich? Geben Sie die allgemeine mathematische Problemformulierung an. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Heuristik von Müller-Meerbach eine Lösung für das Problem. Allerdings können die Positionen des Kühlraums, der sich auf dem Standort 2 befindet und des Grills, der auf dem Standort 1 montiert ist, nicht geändert werden. Gehen Sie in Index-Reihenfolge vor. Die Distanzmatrix A und Flussmatrix B sind wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 6 & 4 & 5 \\ 6 & \infty & 8 & 2 \\ 4 & 8 & \infty & 4 \\ 5 & 2 & 4 & \infty \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} - & 2 & 0 & 0 \\ 3 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ 8 & 10 & 5 & - \end{pmatrix}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Thesen) **[13 Punkte]**

Nehmen Sie begründet Stellung zu den folgenden Thesen. Eine unbegründete Antwort erhält keine Punkte.

a) Wir betrachten das einstufige Scheduling Problem mit Vor- und Nachlauf, das durch den so genannten Carlier-Algorithmus optimal gelöst werden kann. Dabei stehen n Jobs mit Vorläufen $a_1, \dots, a_n$, Prozesszeiten $p_1, \dots, p_n$ und Nachläufen $q_1, \dots, q_n$ zur Bearbeitung an. Wir nehmen nun an, dass $a_i \leq a_j \Rightarrow q_i \leq q_j, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. In diesem Fall führt die Anwendung des Schrage-Algorithmus zu einem optimalen Plan. (8 Punkte)

b) Das Rucksackproblem (Knapsack Problem) lässt sich optimal asymptotisch in polynomieller Zeit lösen, wenn die Kapazität des Rucksacks ebenfalls polynomiell begrenzt ist. (5 Punkte)

Aufgabe 5 (Cutting Stock Problem) **[15 Punkte]**

Wir betrachten die Lösung des Cutting Stock Problems für Rollen der Länge $W = 10$ mit Hilfe der Spaltengenerierung. Dabei nehmen wir an, dass wir insgesamt 4 Finals mit Größen $w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 8$ und $w_4 = 3$ in den Mengen $b_1 = 10, b_2 = 15, b_3 = 15$ und $b_4 = 17$ zu produzieren haben. Aktuell liegen uns die zulässigen Schnittmuster $a^1 = (2,1,0,1)^T, a^2 = (0,0,1,0)^T, a^3 = (2,2,0,0)^T$ und $a^4 = (0,0,0,3)^T$ vor. Prüfen Sie mit Hilfe des zugehörigen dualen Problems, ob die ausschließliche Verwendung der gefundenen Schnittmuster zu einer optimalen Lösung der LP-Relaxierung des Cutting Stock Problems führt. Wenn nicht, geben Sie ein verbesserndes Schnittmuster an. Geben Sie zudem die Definition für das aktuelle Pricing Problem an.

Hinweis: Wenn Sie die duale Lösung nicht berechnen können, verwenden Sie die folgende duale Lösung, die nicht richtig sein muss: $y^T = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}\right)$.

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k\}$$

$$V(\emptyset,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k')} p_j - d_{k'}\right) \\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right)\end{array}\right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left|J\left(\frac{1}{2},1\right]\right|+\left\lceil\frac{1}{2}\cdot\left|J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right|\right\rceil$$

$$LB=\left\lceil\left|J\left(\frac{2}{3},1\right]\right|+\frac{2}{3}\cdot\left|J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right|+\frac{1}{3}\cdot\left|J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\right|\right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M)=\max\left\{\sum_{i=0}^{k} t_{k\cdot M+1-i} : \mathrm{k}\in\left\{1,\ldots,\left\lfloor\frac{N-1}{M}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$LB=\min\{M : C(M)\le C\}$$

$$E_j := \left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in P_j^*} t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M+1-\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in F_j^*} t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$LB=\min\{M \mid L_j(M)\ge E_j \forall j\}$$

$$L(j)=\sum_{k\in\{h \mid h<j, h\notin P_j^*\}} L(k)+1$$

$$If\ x < e^{\frac{-\Delta}{t}}, then S_0 = S$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i,j)=\min\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1}, V^-(i,j-1)+x_j-x_i\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i,j)=\min\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i, V^+(i+1,j)+x_j-x_i\}$$