Platz-Nr.: _______

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2024/25

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	25.03.2025
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **sechs** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Scheduling) **[34 Punkte]**

Ein Friseursalon beschäftigt einen berühmten Star-Friseur, der nur die VIP-Kunden bedient. Jeder dieser VIP Kunden benötigt eine gewisse Vorbereitungszeit (für das Waschen, Ausrasieren und weitere Aktivitäten) sowie eine gewisse Nachbereitungszeit (Färben, Pflegeprodukte anwenden und weitere Aktivitäten), die von den übrigen Mitarbeitern übernommen werden (diese Arbeiten können gleichzeitig für verschiedene VIP Kunden erfolgen). Nur das Schneiden übernimmt der Star-Friseur selbst. Damit kann er immer nur jeweils einen Kunden bedienen und diese eigentliche Bedienung erfolgt ohne Unterbrechung. Die Vorbereitungszeit a_i, die Nachbereitungszeit q_i und die eigentliche Bedienungszeit p_i können Sie für alle VIP Kunden i der untenstehenden Tabelle entnehmen. Eine fünfköpfige Gruppe von VIP Kunden ist auf dem Weg zu einer Gala und muss nun bedient werden. Die Gruppe möchte geschlossen aufbrechen und wartet ungeduldig, dass all ihre Frisuren inklusive Nachbearbeitungen fertig werden.

i	1	2	3	4	5
a_i	20	5	0	1	3
p_i	5	2	4	4	8
q_i	3	15	7	4	5

a) Charakterisieren Sie kurz das vorliegende Scheduling Problem. Welche Zielsetzung wird verfolgt? (5 Punkte)

Verwenden Sie für die folgenden beiden Aufgabenteile die Tabellen auf der nächsten Seite und beschriften Sie sie bei Aufgabenteil c) angemessen.

b) Finden Sie mit dem Schrage-Algorithmus eine Lösung σ für das obige Scheduling-Problem. (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie eine optimale Lösung des Problems mit Hilfe des Branch&Bound-Verfahrens von Carlier. (10 Punkte)

Nehmen Sie begründet Stellung zu den folgenden Aussagen:

d) Nehmen wir an, dass es bei einer Lösung des obigen Scheduling Problems einen kritischen Pfad gibt, der nur aus einem einzelnen Job besteht. Dann ist diese Lösung optimal. (6 Punkte)

e) Gehen Sie nun davon aus, dass die Vorbereitungszeiten der VIP Kunden wegfallen. Es gibt also lediglich noch Bearbeitungszeiten und Nachbearbeitungszeiten. Dann gilt unabhängig von den oben gegebenen Werten, dass in jedem optimalen Schedule ein VIP Kunde mit größerer Nachbearbeitungszeit immer vor einem VIP Kunden mit kleinerer Nachbearbeitungszeit produziert wird. (6 Punkte)

Nr.	Job	Start	Dauer	Ende	Tail	Fertig	Bereit
1							
2							
3							
4							
5							

Aufgabe 1b)

Nr.	Job	Start	Dauer	Ende	Tail	Fertig	Bereit
1							
2							
3							
4							
5							

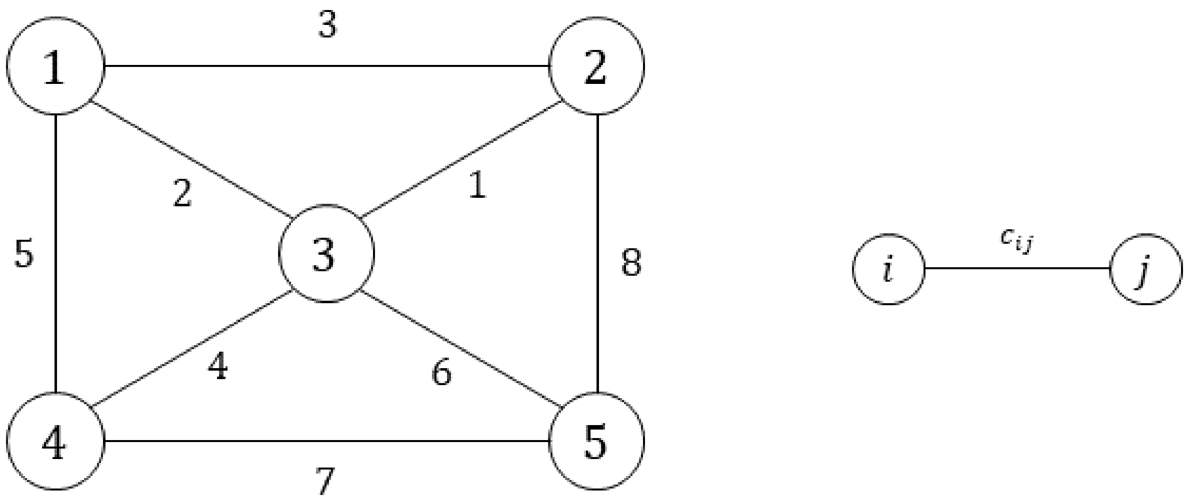
Nr.	Job	Start	Dauer	Ende	Tail	Fertig	Bereit
1							
2							
3							
4							
5							

Nr.	Job	Start	Dauer	Ende	Tail	Fertig	Bereit
1							
2							
3							
4							
5							

Aufgabe 1c)

Aufgabe 2 (Lagrange-Relaxation) **[22 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Instanz des symmetrischen Traveling Salesman Problem (sTSP).



a) Erklären Sie die maximale 1-Tree Bound. Welche Bedingung wird im Vergleich zu einer Tour relaxiert? (6 Punkte)

b) Berechnen Sie die maximale 1-Tree Bound für obiges Problem. (8 Punkte)

Hinweis: Sie können einen minimalen 1-Tree ohne Nachweis angeben.

c) Passen Sie das mathematische Modell des sTSP derart an (d.h. die Menge der Restriktionen; Sie müssen das Modell an sich nicht aufschreiben), dass die folgende Variante des sTSP realisiert wird:

In einem Graphen mit $V = \{1, \dots, 10\}$, $E = V \times V$ und $c_{ij} \geq 0 \;\; \forall (i,j) \in E$ suchen wir eine minimale Tour, die die Knoten 3, 4 und 5 in dieser Reihenfolge nacheinander besucht. Außerdem: Sollte Knoten 8 nach Knoten 7 besucht werden, so sollen immer mindestens zwei weitere Knoten zwischen den Knoten 7 und 8 besucht werden. (8 Punkte)

Aufgabe 3 (Line TSP) **[19 Punkte]**

Wir betrachten die folgende Instanz eines Line-TSP mit harten Zeitfenstern bezüglich der Fälligkeiten (d.h. der Deadline der Kunden) aber ohne sogenannte „release dates“ und Auslieferungszeiten (handling times) an den Kundenorten (d.h. $h_i = r_i = 0, \forall i \in 1, \dots, N$). Die Position x_i sowie die Fälligkeit (deadline) d_i der Kunden $i = 1, \dots, 5$ können Sie der folgenden Tabelle entnehmen. Startpunkt der Tour ist $i = 3$.

i	1	2	3	4	5
d_i	50	25	0	8	25
x_i	0	3	5	10	14

a) Erklären Sie in Ihren eigenen Worten den Ausdruck $V^+(i,j)$. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie durch Anwendung des aus der Vorlesung bekannten DP-Ansatzes den Wert $V^+(2{,}5)$. (10 Punkte)

c) Nehmen Sie begründet Stellung zu der folgenden These (eine auf ‚ja‘ oder ‚nein‘ beschränkte Antwort erhält keine Punkte):

$$V^+(i,j) = \infty \;\Rightarrow\; V^+(i,j+1) = \infty$$

(7 Punkte)

Aufgabe 4 (Thesen) **[15 Punkte]**

Nehmen Sie begründet Stellung zu den folgenden Thesen:

a) Vergleicht man die Metaheuristiken Simulated Annealing und Tabu Search in ihrem Grundaufbau miteinander, so wird deutlich, dass Simulated Annealing mehr auf Intensivierung der Lösungssuche ausgerichtet ist als Tabu Search, während es sich beim Aspekt der Diversifikation genau anders herum verhält. (5 Punkte)

b) Wir betrachten ein Cutting Stock Problem mit Bedingung $a_1 + 2a_2 + 3a_3 \leq 20$. Gegeben ist die aktuelle duale Lösung $\pi = (0, 5, -6)^T$. Dann verbessert die Einbeziehung des Schnittmusters $a = (3, 4, 3)^T$ den Zielfunktionswert. (5 Punkte)

c) Wir betrachten das asymmetrische Traveling Salesman Problem. Sind alle Kantenkosten c_{ij} strikt positiv, so garantiert das Verfahren von Little et al. (1963) immer in asymptotischer polynomieller Zeit eine optimale Lösung. (5 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k) = \{ i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k \}$$

$$V(\varnothing,t) = 0 \text{ and } V(\{j\},t) = \max\{0, t + p_j - d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t) = \min_{\delta} \left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k')} p_j - d_{k'}\right) \\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'), t + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right) \end{array} \right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}$

$$LB = \left| J\left(\frac{1}{2},1\right] \right| + \left\lceil \frac{1}{2} \cdot \left| J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \right| \right\rceil$$

$$LB = \left\lceil \left| J\left(\frac{2}{3},1\right] \right| + \frac{2}{3} \cdot \left| J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right] \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \right| + \frac{1}{3} \cdot \left| J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] \right| \right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M) = \max\left\{ \sum_{i=0}^{k} t_{k \cdot M+1-i} : \mathrm{k} \in \left\{1,\ldots,\left\lfloor \frac{N-1}{M} \right\rfloor \right\} \right\}$$

$$LB = \min\{M : C(M) \le C\}$$

$$E_j := \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in P_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad \mathit{for}\ j = 1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M + 1 - \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in F_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad \mathit{for}\ j = 1,\ldots,N$$

$$LB = \min\{M \mid L_j(M) \ge E_j \forall j\}$$

$$L(j) = \sum_{k \in \{h \mid h<j, h \notin P_j^*\}} L(k) + 1$$

$$\mathit{If}\ x < e^{\frac{-\Delta}{t}}, \mathit{then}\ S_0 = S$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i,j) = \min\{V^+(i,j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i,j-1) + x_j - x_i\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i,j) = \min\{V^-(i+1,j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1,j) + x_j - x_i\}$$