

Platz-Nr.: _____

Name: _____ Vorname: _____ Matrikel-Nr.: _____

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Sommersemester 2025

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	23.07.2025
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **6** Seiten.

Unterschrift: _____

Aufgabe 1 (Line-TSP)**[24 Punkte]**

Gegeben sei eine lösbare Line-TSP Instanz mit 5 Kunden und Fahrzeuggeschwindigkeit $v = 1$. Die Orte und Fälligkeiten sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen:

Kunde i	1	2	3	4	5
Ort x_i von Kunde i	1	7	9	17	18
Fälligkeit d_i	45	21	0	11	55

- a) Definieren Sie die Zustände $V^+(i, j)$ und $V^-(i, j)$. (4 Punkte)
- b) Wie unterscheidet sich der Zustand $V^+(i, j)$ von dem Zustand $U^+(i, j)$? (2 Punkte)
- c) Ermitteln Sie mithilfe eines geeigneten Ansatzes der Dynamischen Programmierung den Zustand $V^-(1, 4)$ und geben Sie die hieraus entstehende optimale Tour an. Gehen Sie davon aus, dass die gegebene Instanz lösbar ist. (9 Punkte)
- d) Nun sei eine vollständig gelöste allgemeine Instanz mit $n \in \mathbb{N}$ Kunden und Startkunde $i^* \in \{1, \dots, n\}$ gegeben. D.h. für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \leq j$ sind $V^+(i, j)$ und $V^-(i, j)$ bekannt. Es kommt nun ein neuer Kunde $i = 0$ mit $x_0 < x_1$ hinzu. Es gilt für die Kundenorte $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i < j$: $x_i < x_j$. Wie viele noch nicht vorher bekannte Zustände $V^+(i, j)$ und $V^-(i, j)$ mit $i, j \in \{0, \dots, n\}, i \leq j$, müssen Sie bestimmen, um Zustand $V^+(0, n)$ ermitteln zu können? $V^+(0, n)$ ist hierbei nicht mitzuzählen während demgegenüber möglicherweise unzulässige Zustände (also diejenigen, die den Wert “ ∞ ” erhalten) mitzuzählen sind. Begründen Sie Ihre Antwort. (9 Punkte)

Aufgabe 2 (Knapsack-Problem)**[21 Punkte]**

Gegeben sei ein 0-1-Knapsack-Problem mit n Gütern, Nutzen p_j und Gewicht w_j für alle Güter $j \in \{1, \dots, n\}$ und Kapazität C .

- a) Erstellen Sie für den allgemeinen Fall des 0-1-Knapsack-Problems mit n Gütern das ganzzahlige lineare Programm. (4 Punkte)
- b) Betrachten Sie nun ein sogenanntes 0-3-Knapsack-Problem, also eines, bei dem jedes Gut bis zu dreimal mitgenommen werden kann. Ihnen steht allerdings nur ein Verfahren zur optimalen Lösung des 0-1-Knapsack-Problems zur Verfügung. Können Sie dieses Verfahren auch dazu nutzen, das gegebene 0-3-Knapsack-Problem optimal zu lösen? Nehmen Sie begründet hierzu Stellung. (8 Punkte)
- c) Berechnen Sie mithilfe eines **Best-first B&B-Verfahrens** die **ersten fünf Knoten** (Wurzelknoten eingeschlossen) des Enumerationsprozesses für die nachfolgende Instanz mit $C = 21$. Verzweigen Sie über das kritische Gut. Für die Berechnung aller benötigten Schranken in jedem Knoten nutzen Sie lediglich die erzielten Ergebnisse der LP-Relaxierung. (9 Punkte)

Gut i	1	2	3	4	5	6
Nutzen p_i	20	4	28	27	36	5
Gewicht w_i	4	2	7	9	6	5

Aufgabe 3 (Cutting-Stock Problem)**[20 Punkte]**

Wir betrachten das folgende Cutting-Stock Problem, bei dem jede Rolle die Kapazität $W = 13$ besitzt.

Produkttyp (Finaltyp)	1	2	3	4
Länge w_i	2	5	3	7
Anzahl b_i	16	7	28	14

- a) Überprüfen Sie, ob die ausschließliche Verwendung der Schnittmuster

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer optimalen Lösung für die LP-Relaxierung des obigen Cutting Stock Problems führt. Zeigen Sie dazu die Optimalität der obigen Lösung oder geben Sie ein verbesserndes Schnittmuster an. Gehen Sie davon aus, dass die erste Dualvariable den Wert $\frac{2}{13}$ besitzt.

Hinweis: Schreiben Sie die Restriktionen zur Findung eines verbessernden Schnittmusters detailliert auf. (15 Punkte)

- b) Wir unterstellen nun, dass die ausschließliche Verwendung der obigen Schnittmuster zu einer optimalen Lösung für die LP-Relaxierung des obigen Cutting Stock Problems führt. Geben Sie den Zielfunktionswert der ausschließlich mit den obigen Schnittmustern erzielbaren Lösung für die LP-Relaxierung des betrachteten Cutting Stock Problems an. Was bedeutet dieser Wert für die optimale Lösung des ursprünglichen Cutting Stock Problems? Wenn Sie unter a) keine Lösung ermitteln konnten, wählen Sie eine beliebige Lösung. (5 Punkte)

Aufgabe 4 (Meta Heuristiken)

[25 Punkte]

- a) Sie überlegen, ein Tabu Search Verfahren zur Lösung eines komplexen Optimierungsproblems zu entwickeln. Skizzieren Sie kurz die aus Ihrer Sicht bestehenden wesentlichen strukturellen Nachteile, die ein solches Verfahren besitzt. Welcher dieser Nachteile wurde in den bekannten Tabu Search Verfahren von Nowicki und Smutnicki (1996) zum Job Shop Scheduling Problem und von Taillard, Badeau, Gendreau, Guertin, und Potvin (1997) zum Vehicle Routing Problem mit Soft Time Windows hauptsächlich versucht zu verbessern und welche Methodik wurde hierzu jeweils eingesetzt? (11 Punkte)
- b) Zur Überprüfung, ob eine betrachtete Lösung S im Rahmen eines Tabu Search Verfahrens einen Tabu Status erhält sollen nacheinander T sogenannte Fingerprints eingesetzt werden, die wir vereinfachend als $f_1, \dots, f_T$ bezeichnen. Damit ergeben sich die folgenden Fragen:
- Warum erfolgt im Rahmen eines Tabu Search Verfahrens die Vergabe von Tabu Zuständen? (2 Punkte)
 - Welches Kriterium würden Sie einsetzen, um über die Reihenfolge der angewendeten T Fingerprints zu entscheiden. (4 Punkte)
 - Erläutern Sie kurz den Ablauf zur Vergabe des Tabu Zustandes für eine gegebene Lösung S . Gehen Sie dabei auch auf die Daten ein, die Sie hierfür speichern müssen. Müssen für die Identifikation eines Tabu Zustandes einer aktuellen Lösung S immer alle T Fingerprints eingesetzt werden oder reicht es, dass bereits ein Fingerprint f_i einen Tabu Zustand identifiziert? (8 Punkte)

Formeln:

$$\begin{aligned}
 J(j,l,k) &= \{i \mid j \leq i \leq l \wedge p_i < p_k\} \\
 V(\emptyset, t) &= 0 \text{ and } V(\{j\}, t) = \max\{0, t + p_j - d_j\} \\
 V(J(j,l,k), t) &= \min_{\delta} \left(\begin{aligned} &V(J(j, k' + \delta, k'), t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k')} p_j - d_{k'}\right) \\ &+ V\left(J(k' + \delta + 1, l, k'), t + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k)} p_j\right) \end{aligned} \right), \\
 \text{with } k' \in J(j,l,k) &\text{ is such that } p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 LB &= \left\lfloor J\left(\frac{1}{2}, 1\right) \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor J\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\rfloor \right\rceil \\
 LB &= \left\lceil \left\lfloor J\left(\frac{2}{3}, 1\right) \right\rfloor + \frac{2}{3} \cdot \left\lfloor J\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \right\rfloor + \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor J\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\rfloor + \frac{1}{3} \cdot \left\lfloor J\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \right\rfloor \right\rceil \\
 C(M) &= \max \left\{ \sum_{i=0}^k t_{k \cdot M + 1 - i} : k \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{M} \right\rfloor \right\} \right\} \\
 LB &= \min \{M : C(M) \leq C\} \\
 E_j &:= \left\lfloor \frac{\left(t_j + \sum_{h \in P_j^*} t_h \right)}{C} \right\rfloor \quad \text{for } j = 1, \dots, N \\
 L_j(M) &:= M + 1 - \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in F_j^*} t_h \right)}{C} \right\rceil \quad \text{for } j = 1, \dots, N \\
 LB &= \min \{M \mid L_j(M) \geq E_j \forall j\} \\
 L(j) &= \sum_{k \in \{h \mid h < j, h \notin P_j^*\}} L(k) + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{If } x < e^{\frac{-\Delta}{t}}, \text{ then } S_0 = S$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i,j) = \min \{ V^+(i,j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i,j-1) + x_j - x_i \}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i,j) = \min \{ V^-(i+1,j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1,j) + x_j - x_i \}$$