Platz-Nr.: _______

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2020/2021

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	25.03.2021
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **6** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Flussüberquerung) **[25 Punkte]**

Um von *New York* aus *New Jersey* zu erreichen nutzen einige Personen mit ihrem PKW oder LKW eine Fahrzeugfähre, die den *Hudson River* überquert. Eine feste Anzahl an Fahrzeugen mit unterschiedlichen Gewichten wollen diese nun benutzen. Die Fähre kann nur ein zusätzliches Gewicht von 20 Tonnen tragen. Die Anzahl der Überfahrten soll möglichst klein sein.

Die folgenden Fahrzeuge sollen transportiert werden:

Fahrzeug i	1	2	3	4	5	6
Gewicht w_i in Tonnen	3	5	9	13	14	16

a) Um welches aus der Vorlesung bekannte Optimierungsproblem handelt es sich? Gehen Sie auf die Nebenbedingungen und auf die Zielfunktion ein. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie mithilfe der LB_3 eine untere Schranke für die Anzahl der Überfahrten. (5 Punkte)

c) Es liegt das Problem als ganzzahliges Programm vor, also

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i, \qquad s.t. \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_i \in \{0,1\} \text{ mit } i \in \{1, \dots, m\},$$

wobei m die Anzahl aller zulässigen Fährenbelegungen ist und jede Spalte a^j eine zulässige Fährenbelegung repräsentiert mit

$$a_i^j = \begin{cases} 1 & \text{falls Fahrzeug } j \text{ zur } i-\text{ten Belegung gehört} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die zugehörige optimale duale Lösung der LP-Relaxation, wobei genau die Belegungen $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ in der primalen Basis sind. (8 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass diese Kombination der Belegungen nicht optimal ist. Geben Sie eine Belegung mit negativen reduzierten Kosten an. (7 Punkte)

Aufgabe 2 (LAP und aTSP) **[13 Punkte]**

Sei die folgende Distanzmatrix für ein asymmetrisches TSP gegeben:

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 8 & 12 & 4 \\ 10 & - & 5 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & - & 7 & 6 \\ 6 & 11 & 14 & - & 8 \\ 8 & 12 & 9 & 10 & - \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Zielfunktionswert der Tour $(1,2,3,4,5,1)$. (3 Punkte)

b) Lösen Sie das zugehörige LAP optimal. Geben Sie außerdem eine optimale duale Lösung an. Interpretieren Sie die gefundene Lösung zudem in Bezug auf die Bestimmung einer optimalen Lösung für das asymmetrische TSP. (10 Punkte)

Aufgabe 3 (Line-TSP) **[23 Punkte]**

Es sei die folgende Instanz mit 6 Kunden eines Line-TSP Problems gegeben:

Kunde i	1	2	3	4	5	6
Ort x_i Kunde i	0	3	6	8	12	16
Deadline d_i Kunde i	36	12	0	10	14	28

Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs beträgt $v = 1$.

a) Definieren Sie die Zustände $V^+(i,j)$ und $V^-(i,j)$. (4 Punkte)

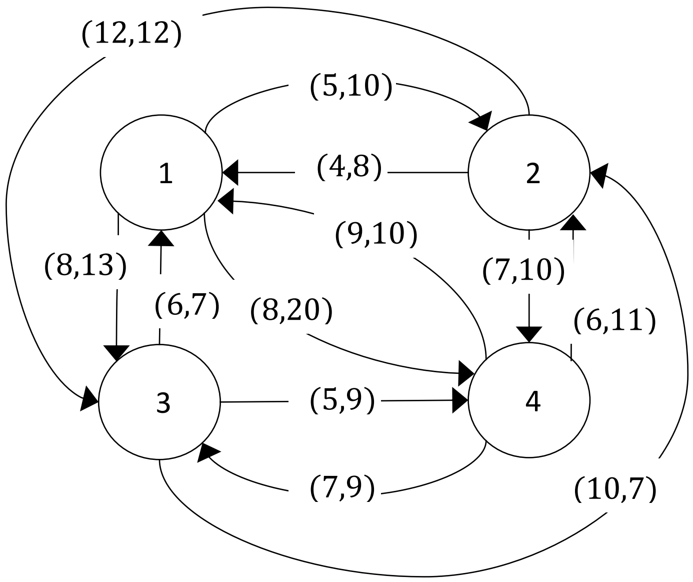
b) Welcher Kunde muss der Startkunde i^* sein, damit überhaupt zulässige Lösungen möglich sind? Begründen Sie Ihre Wahl. (2 Punkte)

c) Ermitteln Sie $V^+(2,5)$ mithilfe des Ansatzes von Lawler. (7 Punkte)

d) Es wird nun ein zusätzlicher Parameter $t > 0$ eingeführt. Das Fahrzeug fährt nun bis zu diesem vordefinierten Zeitpunkt t mit einer Geschwindigkeit von 1 und ab dem Zeitpunkt t mit halber Geschwindigkeit. Ist der Optimierungsansatz aus der Vorlesung im Grundprinzip weiterhin anwendbar? Geben Sie – wenn möglich – die geänderten Rekurrenzgleichungen an. (10 Punkte)

Aufgabe 4 (DP Ansatz von Dumas et al.) [29 Punkte]

Sei das folgende Netzwerk gegeben, wobei jede Kante (i,j) ein Tupel (t_{ij}, c_{ij}) besitzt mit t_{ij} als Reisezeit von i nach j ist und c_{ij} als zugehörige Kosten. Hierbei weist die direkte Kante (i,j) die kürzeste Reisezeit von i nach j auf. Darüber hinaus besitzt jeder Knoten i ein Zeitfenster mit Öffnungszeitpunkt a_i und Schließzeitpunkt b_i und eine Prozesszeit s_i, die der folgenden Tabelle entnommen werden können. Es soll eine kostenminimale Rundtour von Startknoten 1 zu Endknoten 1 gefunden werden, sodass alle Zeitfenster eingehalten werden (die Bearbeitung beginnt innerhalb des jeweiligen Zeitfensters).



Knoten i	1	2	3	4
s_i	0	9	8	4
a_i	0	20	20	10
b_i	200	50	40	55

a) Definieren Sie den Zustand $F(S,i,t)$. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Zielfunktionswert der Tour (1,3,4,2,1). (3 Punkte)

c) Warum genügt es in diesem Fall für alle $i,j \in \{1,2,3,4\}$ für die Berechnung von $EAT(i,j)$ lediglich $a_i + s_i + t_{ij}$ zu berechnen? (4 Punkte)

d) Es liegen also die folgenden $EATs$ und $LDTs$ vor:

$EAT(i,j)$	1	2	3	4
1	-	5	8	8
2	33	-	41	36
3	34	38	-	33
4	23	20	21	-

$LDT(i,j)$	1	2	3	4
1	-	45	32	47
2	196	-	28	48
3	194	40	-	50
4	191	44	33	-

Angenommen es wurden nun die folgenden Zustände (S, i, t) mit 3-elementigen Mengen S mit Kosten $F(S, i, t)$ ermittelt:

$$F(\{1,2,3\}, 2,38) = 20,\ \ F(\{1,2,4\}, 2,20) = 31,\ \ F(\{1,3,4\}, 3,21) = 29,$$
$$F(\{1,3,4\}, 4,33) = 22.$$

i. Bestimmen Sie alle Zustände, die den ersten Post Feasibility Test bestehen. (7 Punkte)

ii. Bestimmen Sie alle Zustände – ohne Ausschluss von Zuständen, die den ersten Test in Teilaufgabe i) nicht bestanden haben –, die nach Anwendung des zweiten Post Feasibility Tests im vorherigen Iterationsschritt tatsächlich erzeugt worden wären. (7 Punkte)

e) Betrachtet werden nun die obigen Zustände, die in Teilaufgabe d) den ersten und zweiten Post Feasibility Test bestanden haben (falls Sie in Teilaufgabe d) keine Lösung finden können, gehen Sie von allen obigen Zuständen aus). Angenommen der Zustand $F(\{1,3,4\}, 4,36) = 22$ befindet sich ebenfalls in der Menge der relevanten 3-elementigen Zustände. Bestimmen Sie ausgehend von diesen Zuständen die 4-elementigen Zustände. Können Sie, aufgrund von Dominanz, Zustände ausschließen? (5 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k\}$$

$$V(\varnothing,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k')} p_j-d_{k'}\right)\\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right)\end{array}\right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'}=\max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left\lceil \left| J\left(\frac{1}{2},1\right] \right| + \left\lceil \frac{1}{2}\cdot \left| J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \right| \right\rceil \right\rceil$$

$$LB=\left\lceil \left| J\left(\frac{2}{3},1\right] \right| + \frac{2}{3}\cdot \left| J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right] \right| + \frac{1}{2}\cdot \left| J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \right| + \frac{1}{3}\cdot \left| J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] \right| \right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M)=\max\left\{\sum_{i=0}^{k} t_{k\cdot M+1-i} : \mathrm{k} \in \left\{1,\ldots,\left\lfloor \frac{N-1}{M} \right\rfloor\right\}\right\}$$

$$LB=\min\{M : C(M) \le C\}$$

$$E_j := \left\lceil \frac{\left(t_j+\sum_{h\in P_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M+1-\left\lceil \frac{\left(t_j+\sum_{h\in F_j^*} t_h\right)}{C} \right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$BEFORE(j)=\{k \in N \mid EAT(j,k) > b_k\}$$

$$FIRST(S,i)+s_i > \min_{j\notin S} LDT(i,j)$$

$$UBMT=\max\left\{\left\lfloor p+(C-w)\cdot\frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}}\right\rfloor,\left\lfloor p+p_{b^*}+(C-w-w_{b^*})\cdot\frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}}\right\rfloor\right\}$$

$$\forall i<i^*<j : U^+(i,j)=\min\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1},V^-(i,j-1)+x_j-x_i\}$$

$$\forall i<i^*<j : U^-(i,j)=\min\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i,V^+(i+1,j)+x_j-x_i\}$$