Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2017/2018

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	23.03.2018
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Aufgabe 1 (Echtzeitsteuerung) **[5 Punkte]**

Erläutern Sie kurz den Begriff der „Adaptation Frequency“ in der Echtzeitsteuerung.

Aufgabe 2 (Scheduling) **[20 Punkte]**

Gegeben sind die folgenden Daten für ein Ein-Maschinen-Scheduling Problem:

Auftrag:	1	2	3	4	5	6
Prozesszeit p:	2	3	4	5	7	6
Fälligkeit d:	8	11	13	14	15	16

a) Bestimmen Sie die Gesamtverspätung aller Aufträge sowie die maximale Verspätung eines Auftrags, in dem Sie die Reihenfolge s = (1,2,3,4,5,6) als semi-aktiven Schedule auswerten! (5 Punkte)

b) Wir betrachten nun die Minimierung der Gesamtverspätung:

i. Definieren Sie die Zustände V(S,t) im Ansatz der Dynamischen Programmierung von Lawler! (3 Punkte)

ii. Welche Vorrangbeziehungen zwischen den Aufträgen im obigen Beispiel können Sie zur Minimierung der Gesamtverspätung ableiten? (5 Punkte)

iii. Berechnen Sie den optimalen Schedule und seinen Zielfunktionswert durch Verwendung des Ansatzes von Lawler. (7 Punkte)

Aufgabe 3 (Traveling Salesman Problem (TSP)) **[16 Punkte]**

Gegeben sind die folgenden Daten für ein asymmetrisches TSP:

$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \infty & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & \infty & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Zielfunktionswert der Tour (1, 2, 3, 4, 5, 1). (3 Punkte)

b) Lösen Sie das durch obige Matrix gegebene LAP mit der ungarischen Methode und geben Sie den optimalen Zielfunktionswert an! (6 Punkte)

c) Nehmen Sie Stellung zu folgender These: „Jede optimale LAP Lösung kann zu einer TSP-Lösung umgebaut werden, die für dieselbe Kostenmatrix maximal den doppelten Zielfunktionswert hat!“ (7 Punkte)

Aufgabe 4 (Limonadisierung) **[49 Punkte]**

Der kleine Rabe Socke ist ein Verfechter der Limonadisierung. Hierzu muss jeder der sechs Haushalte (1, 2, 3, 4, 5 und 6) im Wald mit fünf Limonadensorten (Zitrone, Orange, Cola, Himbeere und Waldmeister) über getrennte Leitungssysteme versorgt werden. Die Leitungen müssen alle sechs Haushalte mit der jeweiligen Limonadenquelle (Z, O, C, H oder W) in einem eigenen Graphen mindestens indirekt verbinden. Sie bilden somit für jede Geschmacksrichtung einen **eigenen Spannbaum in einem eigenständigen ungerichteten Graphen mit unabhängiger Kostenstruktur**. Das Limonadisierungsproblem (LIMO) besteht nun darin, jeden Haushalt mit allen Limonadensorten zu versorgen, und dabei die Gesamtkosten für den Netzwerkaufbau zu minimieren.

a) Schaf Wolle findet das LIMO „voll schwer“. Skizzieren Sie dennoch einen Polynomialzeitalgorithmus zur Lösung von LIMO. (6 Punkte)

b) Rabe Socke hat für jede Geschmacksrichtung eine Reihe von möglichen Verbindungen ermittelt. Er kann dabei jeweils sechs Verbindungen auswählen, ohne dass ein Kreis entsteht. Kann Socke das LIMO schon zulässig lösen? (5 Punkte)

c) Für das Zitronenlimonadennetzwerk sind nun auch die Kosten c aller vorhandenen ungerichteten Kanten im Graphen bekannt. Es gilt $c(Z,1) = 2, c(Z,3) = 4, c(Z,5) = 2, c(Z,6) = 4, c(1,3) = 1$, $c(2,4) = 4$, $c(2,6) = 2$, $c(3,5) = 3$ sowie $c(3,6) = 3$.

   Ermitteln Sie die kostengünstigste Variante zur Limonadisierung mit Zitrone anhand eines geeigneten Algorithmus aus der Vorlesung! (5 Punkte)

d) Ein kleiner Maulwurf teilt Rabe Socke mit, dass die günstigste Kante nun doch nicht realisiert werden kann. Kann Ihre Lösung aus c) einfacher als mit einem kompletten Neustart des Algorithmus auf die neue Situation angepasst werden? (6 Punkte)

e) Ein dicker Maulwurf hat eine Menge von neuen Gängen $E = \{(1,2), (3,4), (4,5)\}$ gegraben, die kostenlos als Kante, allerdings nur für bis zu drei Geschmacksrichtungen, verwendet werden können. Socke vermutet, dass die nette Geste des Maulwurfs die optimale Lösungsfindung des so erweiterten Limonadisierungsproblems (LIMO-E) nun schwieriger macht. Wann ist der Algorithmus aus a) von dieser Erweiterung betroffen und wird inkorrekt? (5 Punkte)

b. w.

f) Eddi-Bär ist der Optimierungsexperte im Wald. Zur Lösung des LIMO-E schlägt er einen Spaltengenerierungsansatz vor, und entwirft folgende LP-Relaxation für LIMO-E, wobei E die Menge der Kanten darstellt, die vom dicken Maulwurf (siehe Aufgabenteil e) gegraben wurden und nur jeweils in maximal drei Spannbäumen auftauchen dürfen.

$$\min \sum_{g \in G} \sum_{L \in \Lambda(g)} c(L) \cdot x_L$$

$$\sum_{g \in G} \sum_{L \in \Lambda(g)\ mit\ e \in L} x_L \leq 3 \ \forall e \in E \text{ (Duale Var: } \varepsilon_e \leq 0\text{)}$$

$$\sum_{L \in \Lambda(g)} x_L = 1 \ \forall g \in G \text{ (Duale Var: } \gamma_g \in \mathbb{R}\text{)}$$

Die Variablen $x_L \geq 0$ zeigen die Verwendung einer möglichen Limonadisierung $L \in \Lambda(g)$ (der Menge aller Limonadisierungen der Geschmacksrichtung $g \in G = \{Z, O, C, H, W\}$) mit Kosten $c(L)$ (also dem Gewicht des zugehörigen Spannbaums) an.

i. Erklären Sie die Bedeutung der Zielfunktion und der Nebenbedingungen im Modell für das LIMO-E von Eddi-Bär. (10 Punkte)

ii. Die reduzierten Kosten einer Limonadisierung $L \in \Lambda(Z)$ mit Geschmacksrichtung Zitrone sind für eine aktuelle Lösung für alle Geschmacksrichtungen (also die zugehörigen Spannbäume) gegeben durch $\bar{c}(L) = c(L) - \sum_{e \in L \cap E} \varepsilon_e - \gamma_Z$. Überprüfen Sie, ob es mit $E = \{(1,2), (3,4), (4,5)\}$, der dualen Lösung $\gamma_Z = 10$, $\varepsilon_{(1,2)} = -2$, $\varepsilon_{(3,4)} = -2$ und $\varepsilon_{(4,5)} = -1$ sowie den weiteren Kanten aus Teilaufgabe c) eine Limonadisierung mit Zitrone gibt, die eine Verbesserung des Zielfunktionswertes des LIMO-E Models erreichen könnte. Erläutern Sie Ihr Vorgehen! (12 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j\le i\le l \wedge p_i<p_k\}$$

$$V(\emptyset,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum\limits_{j\in J(j,k'+\delta,k')}p_j-d_{k'}\right)\\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum\limits_{j\in J(j,k'+\delta,k)}p_j\right)\end{array}\right),$$

with $k'\in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'}=\max\{p_i \mid i\in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left|J\left(\frac{1}{2},1\right]\right|+\left\lceil\frac{1}{2}\cdot\left|J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right|\right\rceil$$

$$LB=\left\lceil\left|J\left(\frac{2}{3},1\right]\right|+\frac{2}{3}\cdot\left|J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right|+\frac{1}{3}\cdot\left|J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\right|\right\rceil$$

$$n_{j1}:=LB_1\left(F_j^*\right)$$

$$n_{j2}:=\begin{cases}LB_2\left(F_j^*\right) & \text{if } p_j \ge 1/2 \text{ or } LB_2\left(F_j^*\right)\notin IN\\ LB_2\left(F_j^*\right)-1/2 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$n_{j3}:=\begin{cases}LB_3\left(F_j^*\right) & \text{if } p_j \ge 2/3\\ LB_3\left(F_j^*\right)-1/3 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$E_j:=\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum\limits_{h\in P_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \textit{for } j=1,\ldots,N$$

$$L_j(M):=M+1-\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum\limits_{h\in F_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \textit{for } j=1,\ldots,N$$

$$UBMT=\max\left\{\left\lfloor p+(C-w)\cdot\frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}}\right\rfloor,\left\lfloor p+p_{b^*}+\left(C-w-w_{b^*}\right)\cdot\frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}}\right\rfloor\right\}$$

$$\forall i<i^*<j: U^+(i,j)=\min\left\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1},V^-(i,j-1)+x_j-x_i\right\}$$

$$\forall i<i^*<j: U^-(i,j)=\min\left\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i,V^+(i+1,j)+x_j-x_i\right\}$$