

Klausur zum 1. Staatsexamen Lehramt

Sommersemester 2008

Teil Combinatorial Optimization

(Prüfer: Prof. Dr. Stefan Bock)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1 (Allgemeine Thesen)

[40 Punkte]

Nehmen Sie begründet zu den folgenden Aussagen Stellung. Eine unbegründete Antwort erhält keine Punkte.

1. Wird bei einem Linearen Programm der Lösungsraum nur einer einzigen Variablen auf die Menge der ganzen Zahlen eingeschränkt, kann durch Anwendung des Simplex Algorithmus weder eine zulässige noch eine optimale Lösung garantiert werden. Vielmehr stellt der Zielfunktionswert der durch das Simplex-Verfahren gefundenen Lösung bei einem Minimierungsproblem lediglich eine untere Schranke und bei einem Maximierungsproblem eine obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert dar. (10 Punkte)
2. Ist das Duale Problem eines Lineares Programms nicht lösbar, d.h., es enthält keine zulässige Lösung, gilt dies ebenfalls für das Primale Problem. (10 Punkte)
3. Gegeben sei eine beliebige Basis zu einem Linearen Programm. Dann existiert hierzu genau eine eindeutig bestimmte Basislösung. Allerdings muss diese Lösung nicht zulässig sein. (10 Punkte)
4. Wir betrachten die Ausführung des Primal-Dualen Algorithmus für ein Primales Minimierungsproblem. Zudem nehmen wir an, dass in der aktuellen Iteration nach Lösung des RP (Reduziertes Primales Problem) noch keine optimale Lösung gefunden werden konnte. Deshalb ist die aktuelle duale Lösung π_1 für die nächste Iteration zu modifizieren. Zudem sei π eine optimale Lösung des DRP (das Duale Problem zum Reduziert Primalen Problem (RP)). Dann gilt, dass jede duale Lösung $\pi_2 = \pi_1 + \varphi \cdot \pi$ für $\varphi > 0$ einen verbesserten, d.h. erhöhten, Zielfunktionswert für das duale Problem besitzt. (10 Punkte)

Aufgabe 2 (Lineares Programm & Simplex Algorithmus)**[40 Punkte]**

Auf einer Bahnstation wird zu den folgenden Zeiten mindestens die angegebene Zahl an Bahnbeamten benötigt:

00:00 Uhr – 04:00 Uhr:	3 Beamte
04:00 Uhr – 08:00 Uhr:	8 Beamte
08:00 Uhr – 12:00 Uhr:	10 Beamte
12:00 Uhr – 16:00 Uhr:	8 Beamte
16:00 Uhr – 20:00 Uhr:	14 Beamte
20:00 Uhr – 24:00 Uhr:	5 Beamte

Zu beachten ist, dass die Dienstzeit jeweils 8 Stunden beträgt und an einem Stück kontinuierlich zu erbringen ist. Zudem sind die Beamten daran interessiert, möglichst nicht um 0:00 Uhr, 4:00 Uhr und um 20:00 Uhr ihren Dienst anzutreten, was durch die Planung bevorzugt zu berücksichtigen ist. Das Management möchte wissen, wie viele Beamte minimal erforderlich sind unter der Bedingung, dass möglichst wenige von ihnen insgesamt in den unbeliebten Schichten eingesetzt werden.

1. Formulieren Sie das Problem als Lineares Programm mit einer geeigneten Formulierung der Zielfunktion. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise (15 Punkte)
2. Ermitteln Sie eine optimale Lösung für das gegebene Problem mit dem Simplex Algorithmus. Wie sieht die Schichtenplanung aus? (25 Punkte)

Aufgabe 3 (Ganzzahlige Optimierung)**[15 Punkte]**

Begründen Sie, warum die Matrix eines Transportproblems total unimodular ist. Welche Konsequenzen hat diese Eigenschaft für alle zulässigen Basislösungen?

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung)**[25 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

Maximiere x_2 bei

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6$$

$$-3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 0$$

mit $x_1, x_2 \geq 0$ und x_1, x_2 ganzzahlig!

Berechnen Sie die optimale Lösung des Problems durch Anwendung des Verfahrens von Gomory (Schnittebenenverfahren oder Cutting Plane Algorithm).