Name: ____________________ Vorname: ____________________ Matrikel-Nr.:__________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2009/2010

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	09.02.2010
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen 4 Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen, zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein.

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Aufgabe 1 (Lineare Optimierung) **[25 Punkte]**

Betrachten Sie das folgende Lineare Programm.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimiere} & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & x_1 + x_2 = 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

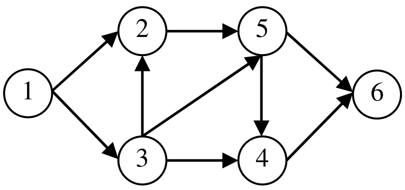
a) Berechnen Sie die optimale Lösung des Linearen Programms durch Anwendung des Dualen Simplex-Algorithmus. (15 Punkte)

b) Wie lautet das Duale Problem zu dem obigen Linearen Programm? (5 Punkte)

c) Ermitteln Sie aus dem Simplex-Tableau, das Sie in a) errechnet haben, die optimale Lösung des Dualen Problems bestehend aus den Dualvariablen. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Kürzeste Wege) **[30 Punkte]**

Gegeben sei ein Graph mit folgenden Bewertungen der Kanten (c_{ij}).



$$
(c_{ij}) = \begin{pmatrix}
\infty & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \\
\infty & 2 & \infty & 3 & 4 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\
\infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty
\end{pmatrix}
$$

a) Formulieren Sie mit dieser Instanz ein kürzeste Wege-Problem als LP von Knoten 1 nach Knoten 6. (10 Punkte)

b) Errechnen Sie den kürzesten Weg von Knoten 1 nach 6 algorithmisch und geben Sie diesen zusammen mit seiner Länge an. (15 Punkte)

c) Erweitern Sie Ihr LP aus a) um folgende Nebenbedingung: Im kürzesten Weg ist entweder der Pfeil (1,3) oder der Pfeil (5,4) enthalten, aber nicht beide zusammen. (5 Punkte)

Aufgabe 3 (Transportproblem) **[20 Punkte]**

Betrachten Sie ein klassisches Transportproblem mit 3 Anbietern und 4 Nachfragern. Die Angebotsmengen a_i und die Nachfragemengen b_j seien $(a_i) = (7,5,8)$ und $(b_j) = (5,4,8,3)$.

a) Bestimmen Sie eine zulässige Lösung mit der Nordwesteckenregel. (5 Punkte)

b) Schlagen Sie eine Transportkostenmatrix (c_{ij}) vor, so dass die in a) ermittelte Lösung eine optimale Lösung ist. Beweisen Sie die Optimalität Ihrer gefundenen Lösung mit Hilfe der reduzierten Kosten im MODI-Algorithmus und durch Gegenüberstellung mit dem Zielfunktionswert der zugehörigen Dualen Lösung. (15 Punkte)

Aufgabe 4 (Komplementärer Schlupf) **[15 Punkte]**

Wir betrachten das Primale Lineare Programm

(P)
Minimiere $Z(x) = c^T \cdot x$
s.t. $A \cdot x = b, x \geq 0,$ mit $A \in IR^{m \times n}$ und $x \in IR^n$

und das zugehörige Duale Lineare Programm

(D)
Maximiere $Z(x) = b^T \cdot \pi$
s.t. $A^T \cdot \pi \leq c,$ mit $A \in IR^{m \times n}$ und π frei.

Zudem seien die zulässigen Lösungen x (für (P)) und π (für (D)) gegeben. Begründen Sie, dass die Aussage des komplementären Schlupfes für alle Komponenten gilt

$$x \text{ und } \pi \text{ sind optimale Lösungen für } (P) \text{ und } (D)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_j = 0 \vee \pi^T \cdot a^j = c_j, \forall j \in \{1,...,n\}$$

Hinweis: Verwenden Sie bei der Herleitung die folgende Eigenschaft:

$$x \text{ und } \pi \text{ sind optimale Lösungen für } (P) \text{ und } (D) \Leftrightarrow b^T \cdot \pi = c^T \cdot x.$$