

Aufgabe 1 (Theoretische Grundlagen der Linearen Optimierung)

[30 Punkte]

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte

These 1: Wir betrachten den Berechnungsablauf des primalen Simplex Algorithmus. Dieser wechselt in jedem Berechnungsschritt von einer zulässigen Basislösung zu einer anderen zulässigen Basislösung. Dabei wird in jedem Übergang der Zielfunktionswert der aktuellen Lösung verbessert. (5 Punkte)

These 2: Zu jeder Basis B eines Linearen Programms in Standardform existiert eine eindeutig bestimmte Basislösung x_B . Allerdings kann diese auch unzulässig sein. (5 Punkte)

These 3: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform, das eine Maximierungsaufgabe darstellt. Zudem sei eine zulässige Lösung des Problems bekannt. Dann ist auch die duale Aufgabe in jedem Fall lösbar. (5 Punkte)

These 4: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform, das eine Maximierungsaufgabe darstellt. Zudem sei eine zulässige Lösung des Problems bekannt. Dann kann die duale Lösung nicht unbeschränkt sein. (5 Punkte)

These 5: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform mit m Restriktionen und n Variablen. Wenn das Problem lösbar ist, dann garantiert der Einsatz des Simplex Verfahrens das Auffinden einer optimalen Lösung. Die Laufzeit des Verfahrens kann durch ein Polynom in n und m nach oben abgeschätzt werden. (5 Punkte)

These 6: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform, das einen beschränkten Lösungsraum besitzt. Dann kann jede zulässige Lösung des Lösungsraums als eine Konvexkombination aller Basislösungen definiert werden. Dies gilt allerdings nicht für Lineare Programme in kanonischer Form, da hier aufgrund der Ungleichungen keine Konvexität vorliegt. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Kürzeste Wege Probleme)**[30 Punkte]**

Wir betrachten den gerichteten Graphen mit den Knoten 1 bis 6 und den folgenden 9 Pfeilen

Pfeil	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Verbundene Knoten	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,2)	(3,4)	(4,6)	(5,4)	(5,6)
Gewicht	1	2	4	1	2	3	1	2	4

- Zeichnen Sie den Graphen inklusive der Gewichte. (3 Punkte)
- Berechnen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 6 und geben Sie diesen an. (12 Punkte)
- Erzeugen Sie für diesen Graphen die Knoten-Pfeil-Inzidenzmatrix. (5 Punkte)
- Definieren Sie das Problem des kürzesten Pfades für den oben beschriebenen Graphen unter Verwendung ihrer Lösung von Teilaufgabe c) als Lineares Programm. (5 Punkte)
- Welche Nebenbedingung muss dem LP hinzugefügt werden, um auszudrücken, dass in einer zulässigen Lösung unbedingt einer der beiden Pfeile 3 und 9 verwendet werden soll, aber nicht beide gleichzeitig? (5 Punkte)

Aufgabe 3 (Ganzzahlige Optimierung)**[30 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} & \text{Maximiere } x_1 \\ & \text{s. t.} \\ & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 6 \leq 0 \\ & 4 \cdot x_1 \leq 6 \cdot x_2 \\ & \text{mit } x_1, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ ganzzahlig!} \end{aligned}$$

- Berechnen Sie die optimale Lösung des Problems durch Anwendung des Verfahrens von Gomory (Schnittebenenverfahren oder Cutting Plane Algorithm). (25 Punkte)
- Auf ein ganzzahliges Optimierungsproblem lassen sich sowohl ein Branch&Bound- als auch ein Schnittebenenverfahren anwenden. Bei beiden Verfahren spielt die LP-Relaxation des Problems eine wichtige Rolle. Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede hinsichtlich der Behandlung des Lösungsraums dieser Relaxation durch die beiden Verfahren. (5 Punkte)