Klausur zum 1. Staatsexamen Lehramt

Wintersemester 2011/2012

Teil Combinatorial Optimization

(Prüfer: Prof. Dr. Stefan Bock)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1 (Allgemeine Thesen) **[15 Punkte]**

Nehmen Sie begründet zu den folgenden Aussagen Stellung. Eine unbegründete Antwort erhält keine Punkte.

a) „Im Simplexalgorithmus sei eine neue Basisvariable und damit eine neue Basis *B* bestimmt. Der Algorithmus wählt im folgenden Schritt aus allen Basislösungen zu dieser Basis immer die beste aus.“ (5 Punkte)

b) „Wir betrachten ein minimales s-t-Schnittproblem für ein Netzwerk $N=(V,E,c,s,t)$. Dann stellt der Wert des maximalen s-t-Flusses eine obere Schranke für den minimalen s-t-Schnitt im Netzwerk dar.“ (5 Punkte)

c) „Wir betrachten ein Lineares Programm (P) und das zugehörige Duale Programm (D). Dabei handelt es sich bei (D) um ein Minimierungsproblem. Ferner gilt, dass (P) nicht lösbar ist, d.h. (P) besitzt keine zulässige Lösung. Dann muss (D) unbeschränkt (unbounded) sein.“ (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem) [55 Punkte]

Gegeben sei das folgende ausbalancierte Transportproblem mit 3 Anbietern mit einem Angebotsvektor $\vec{a}^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ und 4 Nachfragern mit Nachfragevektor $\vec{b}^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Die Kosten für die einzelnen Transporte von Anbietern *i* zu Nachfragern *j* sind der folgenden Matrix zu entnehmen:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine zulässige primale Lösung x^{NW} mit der Nordwesteckenregel und ihren Zielfunktionswert. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie eine zulässige duale Lösung über die im Alpha-Beta-Algorithmus angewandte Minimummethode und ihren Zielfunktionswert. (5 Punkte)

c) Begründen Sie durch Anwendung passender Sätze, dass beide Lösungen gleichzeitig nicht optimal sein können. Verwenden Sie in Ihrer Argumentation dazu insbesondere auch die durch die duale Lösung erzeugte Matrix $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ und die Variablen $x_{ij}^{NW} > 0$ der primalen Lösung x^{NW}. (5 Punkte)

d) Zeichnen Sie nun das im Alpha-Beta-Algorithmus verwendete Netzwerk unter Zuhilfenahme der in b) bestimmten dualen Lösung. (5 Punkte)

e) Bestimmen Sie den maximalen s-t-Fluss in diesem Netzwerk mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson. (15 Punkte)

f) Welche Bedeutung hat der Wert *f* dieses Flusses bei einer Interpretation im Kontext des Transportproblems? Welchen Wert muss der Fluss annehmen, damit eine zur aktuellen dualen Lösung korrespondierende primal zulässige Lösung existiert? (5 Punkte)

g) Bestimmen Sie die durch den berechneten Fluss induzierte primale Lösung $\vec{x}^{Alpha-Beta}$. Ist diese zulässig für das Transportproblem? (5 Punkte)

h) Wie lässt sich die Optimalität von $\vec{x}^{Alpha-Beta}$ im Falle der Zulässigkeit begründen? Gehen Sie dabei insbesondere auf die Struktur des Primal-Dualen-Simplex und den Zusammenhang mit dem Alpha-Beta-Algorithmus ein. (10 Punkte)

Aufgabe 3 (Duale Aufgaben und Formulierungen von LPs) [15 Punkte]

Gegeben sei die folgende lineare primale Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere } -x_2 \text{ bei}$$
$$x_2 \geq 0,\ x_1 \text{ frei und}$$
$$x_1 - x_2 \leq -5,\ x_1 + 2x_2 \leq 7,\ 2x_1 + x_2 \geq -7$$

a) Bestimmen Sie die dazugehörige duale Aufgabe. (5 Punkte)

b) Bringen Sie das primale Problem in Standardform. (5 Punkte)

c) Nehmen Sie zu folgender These begründet Stellung: „Der Lösungsraum der dualen Aufgabe aus a) unterscheidet sich vom Lösungsraum der dualen Aufgabe des primalen Problems in Standardform.“ (5 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) [35 Punkte]

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere } 2 \cdot x_1 + x_2 \text{ bei}$$
$$3 \cdot x_2 \leq 12$$
$$3 \cdot x_1 + x_2 \leq 12$$
$$\text{mit } x_1, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ ganzzahlig!}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung der LP-Relaxation unter Verwendung des Simplexalgorithmus‘. (10 Punkte)

b) Geben Sie mit Hilfe des letzten Simplextableaus die zur optimalen Lösung der LP-Relaxation korrespondierende duale Lösung an. Interpretieren Sie die duale Lösung ökonomisch unter der Annahme, dass die Optimierungsaufgabe im Rahmen einer Produktionsprogrammplanung entstanden ist. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie rechnerisch die optimale ganzzahlige Lösung mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory. (10 Punkte)

d) Bestimmen Sie rechnerisch die optimale ganzzahlige Lösung mit dem Branch & Bound-Verfahren. (10 Punkte)