Name: ___________________________ Vorname: _________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2012/2013

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	06.02.2013
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen, zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Aufgabe 1 (Thesen) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte

These 1: Wir betrachten den primal dualen Simplexalgorithmus. Das reduzierte primale Problem (RP) kann auch einen negativen optimalen Zielfunktionswert ξ_0 besitzen. (5 Punkte)

These 2: Zu jeder Basis B eines Linearen Programms in Standardform existiert eine eindeutig bestimmte zulässige Basislösung x_B. (5 Punkte)

These 3: Die Anzahl von Verbindungskanten eines minimalen s-t-Schnitts in einem Netzwerk kann größer sein als die Anzahl der bis zur vollen Kapazität ausgelasteten Kanten der dazugehörigen optimalen Lösung des korrespondierenden Max-Flow Problems. (5 Punkte)

These 4: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform, das eine Maximierungsaufgabe darstellt und keine zulässige Lösung besitzt. Dann muss das duale Problem unbeschränkt sein. (5 Punkte)

These 5: Eine Matrix, die nur 0, 1 und -1 Einträge besitzt, ist total unimodular. (5 Punkte)

These 6: Eine mit dem MODI-Verfahren berechnete optimale Lösung eines Transportproblems kann $n+m$ Variablen $x_{ij} > 0$ besitzen, wobei n die Anzahl der Nachfrager und m die Anzahl der Anbieter bezeichne.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 (Max-Flow-Problem) **[20 Punkte]**

Wir betrachten das durch folgende Adjazenzliste gegebene Netzwerk:

Knoten	**Nachfolger, Kapazität; …**
1	2, 3; 3, 4;
2	4, 4; 5, 1;
3	2, 2; 4, 2; 5, 1;
4	5, 2; 6, 3;
5	4, 2; 6, 4;
6	

a) Zeichnen Sie das Netzwerk mit Knoten, Kanten und Kapazitäten. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie den maximalen 1-6-Fluss im Netzwerk mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson. Geben Sie in jedem Schritt auch den verwendeten augmentierenden Pfad sowie den aktuellen Fluss durch das Netzwerk an. (11 Punkte)

c) Zeichnen Sie ein Netzwerk, das nur diejenigen Kanten beinhaltet, die in der optimalen Lösung verwendet werden. Geben Sie dazu auch die Werte des Flusses auf jeder Kante an. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie den minimalen 1-6-Schnitt. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (Matrixspiele) **[10 Punkte]**

Wir betrachten das Spiel „Schere Stein Papier“ mit der Erweiterung um das Element „Brunnen“. Zwei Spieler entscheiden sich jeweils gleichzeitig für eines der vier Elemente, der Gewinner wird im Fall von unterschiedlichen Elementen wie folgt ermittelt:

Die Schere zerschneidet das Papier. Der Stein macht die Schere unbrauchbar. Das Papier bedeckt den Brunnen und umwickelt den Stein. Stein und Schere fallen in den Brunnen.

a) Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrix für dieses Spiel aus der Sicht von Spieler 1. (3 Punkte)

b) Stellen Sie das lineare Programm auf, das benötigt wird, um die optimale Strategie und den minimal zu erwartenden Gewinn M_0 zu bestimmen. Gehen Sie hierbei von einer Konstante $C = 1$ aus. (4 Punkte)

c) Das LP aus Teilaufgabe b) hat einen optimalen Zielfunktionswert von 1. Handelt es sich um ein faires Spiel? (3 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[30 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } x_1 + x_2\\
&\text{s. t.}\\
&1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \leq 0\\
&1 \cdot x_1 \leq 3 \cdot x_2\\
&\text{mit } x_1, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Berechnen Sie die optimale Lösung des Problems aus der LP-Relaxation durch Anwendung des Schnittebenenverfahrens von Gomory. (7 Punkte)

c) Formulieren Sie die Ungleichung des oben berechneten Schnittes bei ausschließlicher Verwendung der Strukturvariablen x_1 und x_2. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie aus der LP-Relaxation die optimale ganzzahlige Lösung mit dem Ihnen aus der Vorlesung bekannten Branch & Bound Verfahren. Verzweigen Sie hierzu zunächst über die Variable x_1. (10 Punkte)