Name: ___________________________ Vorname: _________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2013/2014

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	12.02.2014
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen, zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Aufgabe 1 (Thesen) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte

These 1: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform. Falls es eine optimale Lösung dieses Programms gibt, dann ist jede optimale Lösung eine Basislösung. (5 Punkte)

These 2: Existieren zu einer Basis B eines Linearen Programms in Standardform mehrere Basislösungen, dann ist nur genau eine dieser Basislösungen zulässig. (5 Punkte)

These 3: Der Wert des minimalen s-t-Schnitts in einem Netzwerk kann größer sein als der Wert des maximalen s-t-Flusses in diesem Netzwerk. (5 Punkte)

These 4:Wir betrachten ein lösbares Lineares Programm in Standardform mit einer beschränkten Lösungsmenge. Dann lässt sich jede zulässige Lösung als eine strenge Konvexkombination aller möglichen Basislösungen darstellen. (5 Punkte)

These 5: Werden von einer total unimodularen Matrix mit m Zeilen die letzten $k < m$ Zeilen entfernt, ist die resultierende Matrix weiterhin total unimodular. (5 Punkte)

These 6: Eine mit dem MODI-Verfahren berechnete optimale Lösung eines Transportproblems, die ausschließlich m Transportverbindungen benutzt, ist primal degeneriert. Dabei bezeichne $n > 1$ die Anzahl der Nachfrager und $m > 1$ die Anzahl der Anbieter.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 (Netzwerkprobleme) **[30 Punkte]**

Wir betrachten das durch folgende Adjazenzliste gegebene Netzwerk:

Knoten	**Nachfolger, Kapazität; …**
1	2, 5; 3, 4;
2	4, 5; 5, 2;
3	2, 2; 4, 2; 5, 1;
4	5, 2; 6, 4;
5	4, 2; 6, 5;
6	

a) Zeichnen Sie das Netzwerk mit Knoten, Kanten und Kapazitäten. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie den maximalen 1-6-Fluss im Netzwerk mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson. Geben Sie in jedem Schritt auch den verwendeten augmentierenden Pfad sowie den Wert des aktuellen Flusses durch das Netzwerk an. (11 Punkte)

c) Zeichnen Sie ein Netzwerk, das nur diejenigen Kanten beinhaltet, die in der optimalen Lösung des Flussproblems verwendet werden. Geben Sie dazu auch die Werte des Flusses auf jeder Kante an. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie den minimalen 1-6-Schnitt. (3 Punkte)

e) Berechnen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von 1 nach 6, wobei Sie die Kapazitäten der Kanten als Entfernungskosten betrachten. (7 Punkte)

f) Bestimmen Sie die Knoten-Kanten-Adjazenzmatrix dieses Netzwerkes. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (Ganzzahlige Optimierung) **[30 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximiere } x_1 + x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 4 \leq 0 \\
&3 \cdot x_1 \geq 1 \cdot x_2 \\
&\text{mit } x_1, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}
$$

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Berechnen Sie die optimale ganzzahlige Lösung des Problems aus der LP-Relaxation durch zusätzliche Anwendung des Schnittebenenverfahrens von Gomory. (7 Punkte)

c) Formulieren Sie die Ungleichung des ersten von Ihnen in Teilaufgabe b) berechneten Schnittes unter ausschließlicher Verwendung der Strukturvariablen x_1 und x_2. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie aus der LP-Relaxation die optimale ganzzahlige Lösung mit dem Ihnen aus der Vorlesung bekannten Branch & Bound Verfahren. Verzweigen Sie hierzu zunächst über die Variable x_2. (10 Punkte)