Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2014

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	29.09.2014
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Aufgabe 1 (Thesen zu Theorie der Linearen Programmierung) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja" oder „nein" beschränkte Antwort erhält keine Punkte

These 1: Wir betrachten ein Lineares Programm zu dem optimale Lösungen existieren. Wenn wir alle Basislösungen aus dem Lösungsraum entfernen, existiert weiterhin mindestens eine optimale Lösung (5 Punkte)

These 2: Wir betrachten ein Lineares Programm mit mindestens zwei unterschiedlichen optimalen Lösungen x und y. Dann sind alle Lösungen, die als echte Konvexkombinationen (strict convex combination) aus x und y entstehen, ebenfalls optimale Lösungen. (5 Punkte)

These 3: Entfernt man aus einer konvexen Menge alle Extrempunkte so ist die verbleibende Menge nicht mehr konvex. (5 Punkte)

These 4: Wir betrachten ein Lineares Programm in Standardform und eine zugehörige Basis. Dann ist die zugehörige Basislösung eindeutig bestimmt. Diese Basislösung ist zudem genau dann zulässig, wenn sie als echte Konvexkombination (strict convex combination) zweier anderer Basislösungen darstellbar ist. (5 Punkte)

These 5: Wir betrachten ein Lineares Programm (P). Dieses Programm besitzt genau dann eine optimale Lösung, wenn das zugehörige duale Problem (D) lösbar ist. (5 Punkte)

These 6: Wir betrachten ein lineares Programm (P) (Minimierungsaufgabe) und das zugehörige duale Programm (D) (Maximierungsaufgabe). Zudem seien zwei zulässige Lösungen x (für (P)) und π (für (D)) gegeben. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- Beide Programme besitzen eine optimale Lösung.
- Beide Lösungen besitzen einen identischen Zielfunktionswert **genau dann, wenn** beide Lösungen bereits optimal sind. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem und maximale Flüsse) **[35 Punkte]**

Wir betrachten das durch folgende Adjazenzliste gegebene Netzwerk, das im Rahmen der Lösung eines Transportproblems mit dem alpha-beta-Algorithmus entstanden ist:

Knoten	**Nachfolger, Kapazität; …**
s	v_1, 5; v_2, 7;
v_1	w_1,∞;w_2, ∞;
v_2	w_2, ∞;w_3, ∞;
w_1	t, 2;
w_2	t, 4;
w_3	t, 6;
t	

Die aktuelle dual zulässige Lösung ist gegeben durch $\boldsymbol{\alpha}$=(2, 3) und $\boldsymbol{\beta}$=(-1, 3, -1).

a) Zeichnen Sie das Netzwerk mit Knoten, Kanten und Kapazitäten. (3 Punkte)

b) Geben Sie die Vektoren **a** und **b** des betrachteten Transportproblems an. (2 Punkte)

c) Geben Sie den Zielfunktionswert der dualen Lösung an. (2 Punkte)

d) Die Werte aus der Transportkostenmatrix lassen sich anhand des Netzwerks und der dualen Lösung teilweise rekonstruieren. Geben Sie für jeden Eintrag der Matrix entweder den exakten Wert oder eine untere Schranke an. Begründen Sie kurz, warum Sie bestimmte Werte exakt ermitteln können und welche untere Schranke Sie nutzen. (5 Punkte)

e) Berechnen Sie den maximalen s-t-Fluss im Netzwerk mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson. Geben Sie in jedem Schritt auch den verwendeten augmentierenden Pfad sowie den Wert des aktuellen Flusses durch das Netzwerk an. (10 Punkte)

f) Welche Transportmengen ergeben sich auf den einzelnen Verbindungen? (3 Punkte)

g) Entscheiden Sie begründet, ob die aktuelle duale Lösung optimal ist. (5 Punkte)

h) Das oben gelöste Max-Flow-Problem wird zur Lösung des (RP) im primal dualen Simplex für das Transportproblem (P) herangezogen. Warum wird in diesem Fall (RP) mit Hilfe eines Maximierungsproblems gelöst, obwohl (P) ein Minimierungsproblem ist? (5 Punkte)

Aufgabe 3 (Lineare Programme und Ganzzahlige Optimierung) [25 Punkte]

Gegeben Sei das folgende optimale Simplex Tableau für die LP-Relaxation eines ganzzahligen Optimierungsproblems. Wir nehmen an, dass die LP-Relaxation in kanonischer Form gegeben ist, und die Variablen x_1 und x_2 die Strukturvariablen darstellen:

12/5	0	0	3/5	2/5	0
2/5	1	0	-1/5	2/5	0
3/5	0	1	3/5	-2/5	0
0	0	0	-2	-1	1

a) Begründen Sie die Optimalität der aktuellen Lösung der LP-Relaxation und geben Sie die primale Lösung an. Welche Besonderheit weist diese Lösung auf? (6 Punkte)

b) Führen Sie **eine** Iteration des Schnittebenenverfahrens von Gomory durch. Was folgern Sie hinsichtlich der Qualität der von Ihnen ermittelten Lösung? (7 Punkte)

c) Berechnen Sie aus der LP-Relaxation die optimale ganzzahlige Lösung mit dem Ihnen aus der Vorlesung bekannten Branch & Bound Verfahren. Verzweigen Sie hierzu zunächst über die Variable x_2 und beginnen Sie dort mit dem Fall des größeren Wertes für diese Variable. (12 Punkte)