

Aufgabe 1 (Basislösungen)**[20 Punkte]**

- a) Nehmen Sie zu den beiden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte:

These 1: Zu jeder Basis B eines linearen Programms existiert eine eindeutig bestimmte zulässige Basislösung. (5 Punkte)

These 2: Wir betrachten ein ausgeglichenes Transportproblem mit 5 Anbietern und 4 Nachfragern. Dann gibt es eine Basislösung, die die Variablen zu 9 Transportverbindungen mit echt positiven Werten belegt. (5 Punkte)

- b) Wir betrachten das folgende Lineare Programm:

$$\text{Maximiere } x_1 + x_2$$

s. t.

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 9$$

$$3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Entscheiden Sie begründet für jede der Lösungen $(x_1, x_2)^T = (1, 2)$, $(x_1, x_2)^T = (21/10, 27/10)$ und $(x_1, x_2)^T = (9, 0)$ ob es sich einerseits um zulässige Lösungen und andererseits um Basislösungen handelt. (10 Punkte)

Aufgabe 2 (Netzwerke und kürzeste Wege)**[15 Punkte]**

Wir betrachten das durch folgende Adjazenzliste gegebene Netzwerk.

Knoten	Nachfolger, Distanz; ...
s	1, 6; 2, 2; t, 9;
1	3, 1; t, 4;
2	1, 3; 3, 6;
3	t, 3; 4, 1;
4	t, 1;
t	

- a) Zeichnen Sie das Netzwerk mit Knoten, Kanten und Kosten. (3 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Länge des kürzesten Weges von **s** nach **t** mit dem Algorithmus von Dijkstra. Welche Kanten müssen benutzt werden? (12 Punkte)

Aufgabe 3 (Dualität und Simplexalgorithmen)

[10 Punkte]

Füllen Sie den folgenden Lückentext mit den Begriffen **dual**, **primal**, **(un-)zulässig**/(Un-)Zulässigkeit und **optimal**/Optimalität, so dass die folgenden Sachverhalte korrekt beschrieben werden.

Im _____ (1) Simplexalgorithmus zeigt eine Spalte mit negativen reduzierten Kosten und ohne positive Einträge in \bar{A} die Unbeschränktheit des _____ (2) Problems und damit die _____ (3) des _____ (4) Problems an. Im _____ (5) Simplexalgorithmus wird immer eine _____ (6) zulässige Basislösung gehalten, bis die reduzierten Kosten die _____ (7) der _____ (8) Lösung anzeigen. Eine _____ (9) _____ (10) Basislösung, aber nicht negative reduzierte Kosten und damit die Verfügbarkeit einer _____ (11) _____ (12) Lösung sind der Ausgangspunkt für eine Optimierung mit dem _____ (13) Simplexalgorithmus.

Im primal-dualen Simplexalgorithmus bedeutet der Zielfunktionswert $\xi_0 = 0$, dass eine _____ (14) _____ (15) Lösung gefunden wurde, die ein Zertifikat für die _____ (16) der aktuellen _____ (17) Lösung ist. Die _____ (18) Variablen, für die der _____ (19) Schlupf den Wert 0 annimmt, sind dabei Ausgangspunkt für die Erstellung des reduziert _____ (20) Problems.

Aufgabe 4 (Lineare Matrixspiele)

[15 Punkte]

Wir betrachten das folgende Spiel:

Spieler 1 hat die Karten Pik As (PA), Karo As (KA) und Karo Zwei (KZ). Spieler 2 hat die Karten Pik As (PA), Karo As (KA) und Pik Zwei (PZ). Beide Spieler legen gleichzeitig eine Karte auf den Tisch. Haben die beiden Karten die gleiche Farbe gewinnt Spieler 1, sonst Spieler 2. Ein As hat den Wert 1, eine Zwei den Wert 2. Die Höhe des Gewinns richtet sich nach der Karte, die der Gewinner aufgedeckt hat.

- Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrix des Spiels aus Sicht von Spieler 1. (5 Punkte)
- Stellen Sie für die $C=3$ das Lineare Programm auf, mit dem die optimalen Spielstrategien ermittelt werden können. Dieses LP hat den optimalen Zielfunktionswert $1/3$. Was lässt sich damit über das Spiel und die Erwartungen der Spieler aussagen? (5 Punkte)
- Erläutern Sie die Notwendigkeit der Verwendung der Konstante C . (5 Punkte)

Aufgabe 5 (Ganzzahlige Optimierung)

[30 Punkte]

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere } x_1 + x_2$$

s. t.

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 9$$

$$3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \leq 6$$

mit $x_1, x_2 \geq 0$ und x_1, x_2 ganzzahlig!

- a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)
- b) Was können Sie über die Lösung $(x_1, x_2)^T = (2, 2)$ anhand der LP-Relaxation aussagen? (4 Punkte)
- c) Führen Sie **einen** Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. (7 Punkte)
- d) Formulieren Sie die Ungleichung des von Ihnen in Teilaufgabe c) berechneten Schnittes unter ausschließlicher Verwendung der Strukturvariablen x_1 und x_2 . (4 Punkte)
- e) Nehmen Sie begründet zu der folgenden These Stellung:
Das Schnittebenenverfahren von Gomory benötigt im schlimmsten Fall zwar exponentiellen Aufwand, findet allerdings sehr schnell zumindest zulässige Lösungen für das zu lösende ganzzahlige Optimierungsproblem. (5 Punkte)