Name: ______________________ Vorname: ____________________ Matrikel-Nr.:___________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2015

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	28.09.2015
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 3 (drei) Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Basislösungen) **[30 Punkte]**

a) Nehmen Sie zu den folgenden drei Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte:

   These 1: Wir betrachten ein lineares Programm, das keine zulässige Basislösung besitzt. Dann folgt daraus, dass die zugehörige duale Aufgabe unbeschränkt ist.(5 Punkte)

   These 2: Wir betrachten ein lineares Programm und finden zwei Basislösungen mit dem optimalen Zielfunktionswert. Dann hat dieses LP unendlich viele optimale Lösungen. (5 Punkte)

   These 3: Wir betrachten ein lineares Programm, in dem eine optimale ganzzahlige Basislösung vorliegt. Dann ist die Matrix A total unimodular. (5 Punkte)

b) Wir betrachten das folgende Lineare Programm:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } 2 \cdot x_1 + x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&\frac{1}{3} \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 3 \\
&-\frac{1}{2} x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 2 \\
&1 \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 \leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

   Entscheiden Sie begründet für jede der folgenden Lösungen $(x_1, x_2)^T = (2,2)$, $(x_1, x_2)^T = (20/3, 16/3)$ und $(x_1, x_2)^T = (4,0)$, ob es sich einerseits um zulässige Lösungen und andererseits um Basislösungen handelt. Wie viele Basislösungen gibt es insgesamt für dieses Problem? (15 Punkte)

Aufgabe 2 (Primal Dualer Simplex) **[20 Punkte]**

a) Im Primal-Dualen Simplexverfahren werden für die Lösung des primalen Problems (P) das duale Problem (D), das reduziert primale Problem (RP) und das duale des reduziert primalen Problems (DRP) herangezogen. Erläutern Sie jeweils Rolle und Aufgabe der Probleme D, RP, und DRP im Rahmen des Verfahrens. (15 Punkte)

b) Der Alpha-Beta-Algorithmus ist die Anwendung des Primal-Dualen Simplexalgorithmus‘ auf das Transportproblem. Beschreiben Sie die Probleme (RP) und (DRP) in diesem Anwendungsfall. (5 Punkte)

Aufgabe 3 (Lineare Matrixspiele) **[15 Punkte]**

Zwei Spieler (A und B) zeigen jeweils ein oder zwei Finger und äußern dabei gleichzeitig ihre Vermutung über die Summe der von beiden Spielern gezeigten Finger. Liegt genau ein Spieler mit seiner Vermutung für die Summe richtig, entspricht der Wert der Auszahlung an diesen Spieler der Summe der gezeigten Finger. Liegen beide richtig oder falsch, beträgt der Wert der Auszahlung 0.

a) Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrix dieses Spiels aus Sicht von Spieler A. Listen Sie dazu im Vorfeld alle sinnvollen, reinen Strategien für einen Spieler auf. (7 Punkte)

b) Stellen Sie für C=4 das Lineare Programm auf, mit dem die optimalen Spielstrategien ermittelt werden können. (3 Punkte)

c) Wie ist der Zielfunktionswert dieses LPs allgemein zu interpretieren (Hinweis: Es ist keine Lösung des aufgestellten Problems gefragt), und welche Aussage lässt sich dann über die Erwartungen der Spieler treffen? (5 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[25 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}&\text{Maximiere } 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2\\ &\text{s. t.}\\ &1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 9\\ &3\cdot x_1 - 1\cdot x_2 \le 6\\ &\text{mit } x_1, x_2 \ge 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ ganzzahlig!}\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Was können Sie über die ganzzahlige Lösung $(x_1, x_2)^T = (2,2)$ für die betrachtete Optimierungsaufgabe anhand der LP-Relaxation aussagen? (4 Punkte)

c) Führen Sie **einen** Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. (7 Punkte)

d) Formulieren Sie die Ungleichung des von Ihnen in Teilaufgabe c) berechneten Schnittes unter ausschließlicher Verwendung der Strukturvariablen x_1 und x_2. (4 Punkte)