Name: ______________________ Vorname: ____________________ Matrikel-Nr.:___________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2015/2016

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	17.02.2016
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 3 (drei) Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Transportproblem) **[35 Punkte]**

a) Mit der Nordwesteckenregel lässt sich eine zulässige Lösung für das Transportproblem erzeugen. Erläutern Sie, warum es sich bei dieser Lösung immer um eine Basislösung des Problems handelt. Unter welchen Voraussetzungen wird eine primal degenerierte Basislösung erzeugt? (10 Punkte)

b) Der Disponent der Spedition „Hin und Weg KG“ geht davon aus, dass eventuell eine fraktionelle Lösung allen ganzzahligen Lösungen überlegen ist. Teilen Sie seine Ansicht? Begründen Sie Ihre Entscheidung! (5 Punkte)

c) Der Disponent der „Hin und Weg KG“ ist ein Verfechter der **Stepping-Stone-Methode**. Dabei wird bei gegebener Basislösung für jede Nichtbasisvariable (NBV) ein Kreis aus Variablen gebildet, der nur diese eine NBV und sonst nur Basisvariablen beinhaltet (vgl. MODI-Verfahren). Wird beim Transport einer Einheit über diese NBV und entsprechender Anpassung der Transportmengen auf den Basisvariablen des Kreises eine Einsparung realisiert, lässt sich über Verwendung dieses Kreises augenscheinlich eine Verbesserung realisieren, und die maximal mögliche Menge an Einheiten soll nun über diese NBV transportiert werden.

   i) Vergleichen Sie das Vorgehen mit dem MODI-Verfahren. Erläutern Sie dazu vor allem auch, wie das MODI-Verfahren die Schritte des primalen Simplexalgorithmus adaptiert. (10 Punkte)

   ii) Welches der beiden Verfahren würden Sie bevorzugen, wenn immer der Kreis von Variablen zur Verbesserung herangezogen werden soll, der beim Transport einer Einheit über die NBV dieses Kreises die größte Verbesserung erzielt? Was hat das mit den Ihnen bekannten Pivotregeln zu tun? (10 Punkte)

Aufgabe 2 (Das kürzeste Wege Problem) **[10 Punkte]**

a) Erläutern Sie auf Basis der gemachten Vereinfachungen gegenüber dem ursprünglichen Primal-Dualen-Simplexalgorithmus, warum bei der Berechnung von kürzesten Wegen mit dem Dijkstra-Algorithmus negative Kantengewichte verboten sind. (5 Punkte)

b) Der Disponent der Spedition „Hin und Weg KG“ möchte den Dijkstra-Algorithmus für diese Fälle anwendbar machen, indem er die Kantengewichte durch Addition einer positiven Konstante auf Werte ≥ 0 anhebt. Wann gefährdet diese „Reparatur“ des Verfahrens die Optimalität der gefundenen Lösungen? (5 Punkte)

Aufgabe 3 (Lineare Matrixspiele) **[25 Punkte]**

Wir betrachten das folgende Spiel:

Spieler 1 hat die Karten Pik As (PA), Karo As (KA) und Karo Zwei (KZ). Spieler 2 hat die Karten Pik As (PA), Karo As (KA) und Pik Zwei (PZ). Beide Spieler legen gleichzeitig eine Karte auf den Tisch. Haben die beiden Karten die gleiche Farbe gewinnt Spieler 1, sonst Spieler 2. Ein As hat den Wert 1, eine Zwei den Wert 2. Die Höhe des Gewinns richtet sich nach der Karte, die der Gewinner aufgedeckt hat.

a) Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrix des Spiels aus Sicht von Spieler 1. (4 Punkte)

b) Offensichtlich gibt es für Spieler 2 mehr Möglichkeiten zu gewinnen als für Spieler 1. Die Spieler einigen sich, die Kombination KZ/PZ als Patt mit einer Auszahlung von 0 zu werten. Stellen Sie unter dieser Annahme für die Konstante C=3 das Lineare Programm auf, mit dem die optimalen Spielstrategien ermittelt werden können, und **lösen** Sie es mit einem in der Vorlesung behandelten Simplexverfahren Ihrer Wahl. (15 Punkte)

c) Wie sollten sich beide Spieler gemäß ihrer optimalen Strategien verhalten? Welcher Spieler hat einen höheren erwarteten Gewinn? (6 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[20 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } 4 \cdot x_1 - x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 14 \\
&x_2 + x_4 = 3 \\
&2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_5 = 3 \\
&\text{mit } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}$$

Die LP-Relaxation besitzt die optimale Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (\frac{9}{2}, 3, \frac{13}{2}, 0, 0)$.

a) Geben Sie den Zielfunktionswert der optimalen Lösung der LP-Relaxation an. (1 Punkt)

b) Ermitteln Sie den **ersten** Gomory-Schnitt und drücken Sie diesen Schnitt unter ausschließlicher Verwendung der Variablen x_1 und x_2 aus. (15 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Basis in der Form $B(i) = j$ für $i = 1,...,m$ und $j = 1,...,n$ sowie die Basismatrix A_B für die optimale Lösung der LP-Relaxation. (4 Punkte)