Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2016/2017

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	21.02.2017
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ____________________________________

Aufgabe 1 (Allgemeine Thesen) **[30 Punkte]**

Beziehen Sie zu den folgenden Thesen Stellung. Eine unbegründete Antwort erhält keine Punkte.

a) „Der duale Simplexalgorithmus macht die Anwendung der Zwei-Phasen-Methode überflüssig.“ (5 Punkte)

b) „Zu jeder Basislösung gibt es nur eine signifikante Hyperebene, die die Basislösung zu einem Eckpunkt des Polyeders macht.“ (5 Punkte)

c) „Im Fall einer primal degenerierten Basislösung gibt es immer eine Pivotspalte, die direkt zu einer weiteren Verbesserung des Zielfunktionswertes führt.“ (5 Punkte)

d) „Anhand der Pivotspalten des Tableaus bei Ausführung des dualen Simplexalgorithmus lässt sich ablesen, ob die zugehörige primale Problemstellung lösbar ist.“ (5 Punkte)

e) „Bei vollständiger Durchführung des Kürzeste-Wege-Algorithmus (es gilt am Ende also $W = V$) hat man nicht nur den kürzesten s-t-Pfad bestimmt, sondern auch die kürzesten i-t-Pfade für beliebige Knoten $i \in V$.“ (5 Punkte)

f) „Die totale Unimodularität der Koeffizientenmatrix A schließt die Existenz einer fraktionellen optimalen Lösung der LP-Relaxation eines ganzzahligen Programms nicht aus.“ (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Spieltheorie) **[20 Punkte]**

Wir betrachten das folgende Nullsummenspiel mit der Auszahlungsmatrix aus Sicht von Spieler 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Werte a_0 und a^0 und geben Sie das lineare Programm zur Bestimmung der optimalen Strategien und des Erwartungswertes der Spieler an (zunächst ohne Verwendung einer Konstante)! (5 Punkte)

b) Das Spiel ist zugunsten von Spieler 1 geschoben. Was können Sie mit diesem Wissen sofort über das lineare Programm aus Teilaufgabe a) aussagen? (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie die optimalen Strategien für beide Spieler sowie den Wert M_0! (10 Punkte)

Aufgabe 3 (Min-Cost-Network-Flow) **[40 Punkte]**

Gegeben ist ein gerichtetes Netzwerk, dessen Knoten mit Angeboten/Bedarfen $b_i \in \mathbb{Z}$ für jeden Knoten $i \in V$ versehen sind. Für jede Kante $(i,j) \in E$ liegen Kosten $c_{i,j}$ und Kapazitäten $u_{i,j}$ als Parameter vor. Im Min-Cost-Network-Flow-Problem (MCNF-Problem) wird nun ein kostenminimaler Fluss im Netzwerk gesucht, so dass die Angebote ($b_i > 0$) und Bedarfe ($b_i < 0$) an den Knoten genau erfüllt werden. Es gilt $\sum_{i \in V} b_i = 0$. Die Formulierung als lineares Programm sieht wie folgt aus:

Minimiere $c^T f$
s. t.
$A \cdot f = b$ (Flussbedingungen)
$0 \leq f \leq u$ (Kapazitätsrestriktionen)

Die Matrix A stellt dabei die Knoten-Kanten-Adjazenz-Matrix des Netzwerks dar.

a) Wir betrachten das oben definierte MCNF-Problem. Wie viele Variablen $f_{i,j}$ mit $0 < f_{i,j} \leq u_{i,j}$ sind in einer Basislösung des MCNF-Problems höchstens enthalten? (5 Punkte)

b) Beim kürzesten Wege Problem und beim ausbalancierten Transportproblem handelt es sich um spezielle MCNF-Probleme. Beschreiben Sie für beide Probleme, wie diese als MCNF-Problem dargestellt werden können und hinsichtlich welcher Aspekte eine Spezialisierung erfolgt. Gehen Sie dabei explizit auf die spezielle Struktur der Matrix A und den Vektor b sowie die Kapazitätsrestriktionen ein. (12 Punkte)

c) Was können Sie hinsichtlich der Ganzzahligkeit über die mit einem Simplexalgorithmus erzeugten optimalen Lösungen für MCNF-Probleme aussagen? (5 Punkte)

d) Gegeben ist die folgende spezielle Adjazenzliste für ein Netzwerk mit 5 Knoten:

Knoten i	Nachfolger j, Kapazität $u_{i,j}$, Kosten $c_{i,j}$; ...
1	3,5,4;4,1,2;
2	1,2,2;3,2,4;5,1,4;
3	4,3,2;5,2,2;
4	5,1,1;
5	

i. Zeichnen Sie das Netzwerk, und geben Sie die Knoten-Kanten-Adjazenzmatrix A an. (8 Punkte)

ii. Bestimmen Sie **eine zulässige Lösung** für das MCNF-Problem in diesem Netzwerk mit Bedarfsvektor $b^T = (3,2,0,-2,-3)$. Wenden Sie dazu einen Max-Flow-Algorithmus auf eine geeignet abgewandelte Problemstellung an! Geben Sie dann die Kosten des ermittelten Flusses an! *Hinweis:* Hier kann eine Anpassung des Max-Flow-Problems, das dem α-β-Algorithmus zugrunde liegt, weiterhelfen. (10 Punkte)