Name: ____________________________ Vorname: __________________________ Matrikel-Nr.:______________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2017

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	27.09.2017
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 3 (drei) Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Allgemeine Thesen) **[30 Punkte]**

Beziehen Sie zu den folgenden Thesen Stellung. Eine unbegründete Antwort erhält keine Punkte.

a) „Die Phase I der Zwei-Phasenmethode angewendet auf das primale Problem erlaubt eine Aussage zur Unbeschränktheit dieses primalen Problems.“ (5 Punkte)

b) „In einem beschränkten Polyeder lässt sich jeder Punkt als Konvexkombination mehrerer Basislösungen darstellen.“ (5 Punkte)

c) „Die Existenz einer zulässigen primalen Lösung ist gesichert, sobald das duale Problem unlösbar ist.“ (5 Punkte)

d) „Wir betrachten ein lineares Programm, das mit dem primalen Simplexalgorithmus optimal gelöst wurde. Nach Einfügen einer weiteren Nebenbedingung, die die aktuelle optimale Lösung primal unzulässig macht, muss – um das so modifizierte Problem wiederum optimal zu lösen – nun die Zwei-Phasen-Methode angewendet werden.“ (5 Punkte)

e) „In einem Max-Flow-Problem mit n Knoten kann es in einer Basislösung mehr als n Kanten geben, die einen **nicht saturierten Fluss** $f_{i,j}$ größer Null besitzen (d.h. $0 < f_{i,j} < c_{i,j}$), wenn alle übrigen Kanten keinen Fluss aufweisen!“ (5 Punkte)

f) „Die totale Unimodularität der Koeffizientenmatrix A ist notwendig, damit ein lineares Programm in Standardform mehr als eine ganzzahlige Basislösung besitzt.“ (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Primal dualer Simplex) **[25 Punkte]**

Gegeben sei das LP (P):

$$\begin{aligned}&\text{Minimiere } 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3\\ &1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \geq 4\\ &2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \geq 6\\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie das duale Programm (D), und zeigen Sie, dass $\pi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ eine zulässige duale Lösung ist. Ist π auch eine Basislösung von (D)? (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie ausgehend von $\pi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ die Menge J. (5 Punkte)

c) Erläutern Sie, warum die optimale Lösung des reduziert primalen Problems (RP) mit dem Zielfunktionswert 0 die Optimalität der vorliegenden Lösungen im primalen und im dualen Fall für das Ursprungsproblem beweist, obwohl die originalen Koeffizienten der Zielfunktion des primalen Problems in (RP) nicht vorkommen. (10 Punkte)

Aufgabe 3 (MCNF- und Transportproblem) [35 Punkte]

Gegeben ist ein gerichtetes Netzwerk, dessen Knoten mit Angeboten/Bedarfen $b_i \in \mathbb{Z}$ für jeden Knoten $i \in V$ versehen sind. Für jede Kante $(i,j) \in E$ liegen Kosten $c_{i,j}$ und Kapazitäten $u_{i,j}$ als Parameter vor. Im Min-Cost-Network-Flow-Problem (MCNF-Problem) wird nun ein kostenminimaler Fluss im Netzwerk gesucht, so dass die Angebote ($b_i > 0$) und Bedarfe ($b_i < 0$) an den Knoten genau erfüllt werden. Es gilt $\sum_{i \in V} b_i = 0$. Die Formulierung als lineares Programm sieht wie folgt aus:

Minimiere $c^T f$

s. t.

$A \cdot f = b$ (Flussbedingungen)

$0 \leq f \leq u$ (Kapazitätsrestriktionen)

Die Matrix A stellt dabei die Knoten-Kanten-Adjazenz-Matrix des Netzwerks dar.

Gegeben ist nun die folgende spezielle Adjazenzliste für ein Netzwerk mit 7 Knoten:

Knoten i	Nachfolger j, Kapazität $u_{i,j}$, Kosten $c_{i,j}$; ...
s	1,3,0; 2,2,0
1	3,5,4;4,1,2;5,2,3
2	3,2,4;4,2,4;5,1,2;
3	t,1,0;
4	t,1,0;
5	t,3,0;
t	-

a) Zeichnen Sie das Netzwerk. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie **eine zulässige Lösung** für das MCNF-Problem mit Bedarfsvektor $b^T = (0,3,2,-1,-1,-3,0)$, indem Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen s-t-Fluss in diesem Netzwerk bestimmen und die Kosten $c_{i,j}$ vernachlässigen! Geben Sie dann auch die Kosten des ermittelten Flusses an! (12 Punkte)

c) Wir entfernen die Knoten s und t mit allen adjazenten Kanten aus dem Netzwerk, vernachlässigen die Kapazitäten und erhalten somit das Transportproblem. Verwenden Sie den MODI-Algorithmus, um zu überprüfen, ob auf Basis der Lösung aus b) eine Kostenreduktion für die gegebenen Bedarfe erreicht werden kann, und realisieren Sie diese! Erfüllt ihre neue Lösung dennoch die Kapazitätsrestriktionen? (12 Punkte)

d) Welche ökonomischen Aussagen lassen sich aus den Werten der dualen Variablen der Kapazitätsrestriktionen für ein optimales Paar von primaler und dualer Lösung eines MCNF-Problems ableiten? (5 Punkte)