Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2018/2019

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	14.02.2019
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 5 (fünf) Seiten.

Unterschrift: ____________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Sei ein ausbalanciertes Transportproblem mit ganzzahligen Parametern gegeben. Jede Basislösung der LP-Relaxation ist ganzzahlig. (5 Punkte)

These 2: Sei ein lineares Programm gegeben. Dann ist jede optimale Lösung ein Eckpunkt. (5 Punkte)

These 3: Zwei zulässige Basislösungen x^1 und x^2 eines linearen Programms sind optimal, wenn jede strenge Konvexkombination von x^1 und x^2 optimal ist. (7 Punkte)

These 4: Sei ein lineares Programm P gegeben, auf das der duale Simplexalgorithmus angewendet wird. Wird innerhalb des Verfahrens eine Pivotzeile gefunden, die ausschließlich aus nicht negativen Einträgen besteht, so ist das Problem P unbeschränkt. (5 Punkte)

These 5: Betrachtet wird das Max Flow Problem von s nach t auf dem Netzwerk mit den Kanten$e_1 = (s, 1)$, $e_2 = (s, 2)$, $e_3 = (1,3)$, $e_4 = (1,4)$, $e_5 = (2,1)$, $e_6 = (2,3)$, $e_7 = (3,4)$, $e_8 = (3, t)$ und $e_9 = (4, t)$. Sei das Problem wie folgt formuliert:

$$min\ c^T \cdot f$$
$$s.t. D \cdot f \leq b$$
$$f \geq 0$$

wobei n die Anzahl aller s-t-Pfade und $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c_i = -1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Darüber hinaus sei b_i die Kantenkapazität der Kante e_i für alle $i \in \{1, \dots, 9\}$. Außerdem korrespondiert die j-te Spalte D_j zu einem s-t-Pfad mit $j \in \{1, \dots, n\}$, d.h

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_i \text{ in Pfad j genutzt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Angenommen während der Anwendung des primalen Simplexalgorithmus auf dieses Problem entsteht die primale Lösung zur Basis B mit dualer Lösung

$\pi^T = c_B^T D_B^{-1} = (0\ 0 - 1 - 1\ 0 - 1\ 0\ 0\ 0)$.

Dann ist die gefundene Basislösung optimal. (8 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem) **[26 Punkte]**

Sei ein Transportproblem mit zwei Anbietern und drei Nachfragern gegeben. Die Kostenmatrix lautet $c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Dabei sind dem Eintrag (i, j) die Kosten pro Einheit eines zu transportierenden Guts von Anbieter i zu Nachfrager j zu entnehmen. Darüber hinaus sei der Angebotsvektor $(a_1 = 10, a_2 = 8)$ und der Nachfragevektor $(b_1 = 9, b_2 = 6, b_3 = 3)$ gegeben.

a) Finden Sie mithilfe des MODI-Verfahrens eine optimale Lösung dieses Problems. Starten Sie mit der zulässigen Basislösung, die bei der Anwendung der Nordwesteckenregel entsteht. (10 Punkte)

b) Warum darf der Alpha-Beta-Algorithmus die duale Lösung $\pi^T = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 5, \beta_2 = 3$ und $\beta_3 = 2$ als initiale duale Startlösung wählen? (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie eine optimale Lösung des reduzierten primalen Problems $RP(\pi)$ für π aus Aufgabenteil b) innerhalb des Alpha-Beta-Verfahrens. Wenden Sie hierfür einen aus der Vorlesung bekannten Algorithmus an. (7 Punkte)

d) Begründen Sie auf zwei verschiedene Weisen mithilfe der in Teilaufgabe a) ermittelten Lösung, dass π aus Teilaufgabe b) nicht optimal sein kann. Falls Sie in Teilaufgabe a) keine Lösung ermitteln konnten nutzen Sie die optimale Lösung $x_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3 (kürzeste Wege) **[17 Punkte]**

Gegeben ist nun die folgende Adjazenzliste für ein Netzwerk mit 6 Knoten:

Knoten i	Nachfolger j, Kantengewicht $c_{i,j}$; ...
1	2,2 ; 3,3
2	3,2,; 4,6; 5,4
3	5,5
4	6,4
5	4,2;6,3
6	

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (4 Punkte)

b) Finden Sie mit Hilfe des Dijkstra Algorithmus einen kürzesten Pfad von Knoten 1 zu Knoten 6. (6 Punkte)

c) Seien die Netzwerke $N = (V, E, c)$ und. $\tilde{N} = \left(V, \tilde{E}, \tilde{c}\right)$ mit $\tilde{E} = \{(i,j) | (j,i) \in E\}$ und $\tilde{c}\left((i,j)\right) = c((j,i))$ gegeben. Außerdem seien ein Startknoten $s \in V$ und ein Zielknoten $t \in V$ vorgegeben.

Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

Es wird *abwechselnd* ein Iterationsschritt des Dijkstra Algorithmus auf N mit Startknoten s und ein Iterationsschritt des Dijkstra Algorithmus auf $\tilde{N}$ mit Startknoten t angewendet. Der Algorithmus bricht ab, sobald ein Knoten $v \in V$ gefunden wurde, für den ein kürzester s-v-Pfad in N und ein kürzester t-v-Pfad in $\tilde{N}$ gefunden wurde. Beim t-v-Pfad werden alle Kanten (i,j) zu (j,i) überführt.

Zeigen oder widerlegen Sie:

Werden beide Pfade zu einem Pfad $s \rightarrow v \rightarrow t$ zusammengesetzt, so ist dieser Pfad ein kürzester s-t-Pfad in N. (7 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[17 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

Maximiere $2x_1 + x_2$

s. t.

$6x_1 + 24x_2 + x_3 = 15$

$3x_1 - 5x_2 + x_4 = 9$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ und x_1, x_2, x_3, x_4 ganzzahlig!

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie eine optimale ganzzahlige Lösung mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory. (7 Punkte)