Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2019

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	26.09.2019
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ______________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Die Vereinigung zweier konvexer Mengen ist konvex. (5 Punkte)

These 2: Betrachtet wird das lineare Programm

$$\min c^T x, \;\; s.t. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} b \;\wedge x \geq 0\,,$$

wobei die Matrix $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ einen Rang von 2 aufweist.

Dann ist $x_B = (x_1, x_2, x_3) = (3, 3, 5)$ mit den Nicht-Basiskomponenten x_4 und x_5 eine zulässige Basislösung. (7 Punkte)

These 3: Sei ein lineares Programm (P) $\min c^T x,\; s.t. Ax = b \;\wedge x \geq 0$ mit $c^T = (4\;\;7\;\;3)$ und $b^T = (8\;\;7)$ gegeben. Dann existiert keine Matrix A, sodass $x^T = (2\;\;1\;\;6)$ für (P) zulässig **und** $\pi^T = (2\;\;3)$ für das duale Problem von (P) zulässig sind. (7 Punkte)

These 4: Sei ein lineares Programm $\min c^T x,\; s.t. Ax = b \;\wedge x \geq 0$ gegeben, das nur ganzzahlige Basislösungen enthält. Dann ist A eine total unimodulare Matrix. (7 Punkte)

These 5: Für unbeschränkte lineare Programme terminiert der primale Simplexalgorithmus nicht. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem) **[30 Punkte]**

Gegeben ist ein ausbalanciertes Transportproblem (P) mit Kostenmatrix $c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, Angebotsvektor $a^T = (5 \quad 8)$ und Nachfragevektor $b^T = (3 \quad 4 \quad 6)$.

a) Zeigen Sie, dass $\pi^T = (\alpha, \beta)^T = (0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 1)$ eine zulässige Startlösung für den Alpha-Beta-Algorithmus ist. (5 Punkte)

b) Eine optimale Lösung für $DRP(\pi)$ lautet $\tilde{\pi}^T = \left(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right)^T = (0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; 0)$. Bestimmen Sie die verbesserte duale Lösung $\hat{\pi}$ von (P) im Primal-dualen-Simplexverfahren bzw. im Alpha-Beta-Verfahren. (8 Punkte)

c) Erstellen Sie das Netzwerk (Alpha-Beta-Verfahren), das zur Ermittlung einer optimalen Lösung des reduzierten Problems $RP(\hat{\pi})$ dient. Falls Sie in Teilaufgabe b) keine Lösung finden konnten, wählen Sie $\hat{\pi} = \left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = (1 \;\; 5 \;\; -1 \;\; -3 \;\; 0)$ (Bitte beachten Sie, dass diese Lösung nicht die im Aufgabenteil b) gesuchte Lösung ist) (5 Punkte)

d) Finden Sie mithilfe des Netzwerks eine optimale Lösung für $RP(\hat{\pi})$. Nutzen Sie hierbei den Algorithmus von Ford-Fulkerson. (7 Punkte)

e) Führt die in d) gefundene Lösung bereits zu einer optimalen Lösung für (P)? Begründen Sie Ihre Einschätzung. (5 Punkte)

Aufgabe 3 (Netzwerke und kürzeste Wege) **[13 Punkte]**

Wir betrachten das durch folgende Adjazenzliste gegebene Netzwerk.

Knoten	**Nachfolger, Distanz; …**
s	1, 1; 2, 2;
1	2,2; 3, 2; 4,3;
2	4, 3;
3	t, 4;
4	3, 3; t, 2
t	

a) Zeichnen Sie das Netzwerk mit Knoten, Kanten und Kosten. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Länge des kürzesten Weges von **s** nach **t** mit dem Algorithmus von Dijkstra. Welche Kanten werden auf dem gefundenen Weg benutzt? (10 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[17 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

Minimiere $-3x_1 + 5x_2$

s. t.

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 15$

$-x_1 + x_2 + x_4 = 22$

$4x_1 - 2x_2 + x_5 = 46$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ und x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ganzzahlig!

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Führen Sie einen Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. (7 Punkte)