Name: ______________________ Vorname: ____________________ Matrikel-Nr.:___________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2020

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	23.09.2020
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen fünf Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[18 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja" oder „nein" beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Das Produkt zweier total unimodularer Matrizen ist total unimodular. (6 Punkte)

These 2: Sei das lineare Programm

$$\min 10x_1 + 12x_2, \qquad s.t. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = b \ \wedge x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

gegeben. Darüber hinaus seien $x^T = (9, 2, 0, 0)$ eine zulässige Lösung für dieses Problem und $\pi^T = (\frac{14}{5}, \frac{18}{5})$ eine zulässige Lösung für das zugehörige duale Problem. Dann sind x und π optimal. (7 Punkte)

These 3: Sei ein lineares Programm mit mindestens einer zulässigen Lösung gegeben. Zudem wissen wir, dass dieses Programm keine optimale Lösung besitzt. Dann ist der Lösungsraum des zugehörigen dualen Problems leer. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Theorie des Simplexalgorithmus') **[14 Punkte]**

Es wird der primale Simplexalgorithmus auf ein lineares Programm angewendet. Dabei verlässt in einem beliebigen Schritt des Verfahrens eine Variable die Basis. Zeigen Sie, dass diese Variable im nächsten Schritt des Simplexalgorithmus' aufgrund der reduzierten Kosten nicht als Eintrittsvariable gewählt werden kann. (14 Punkte)

Aufgabe 3 (Maximaler Fluss) **[31 Punkte]**

Gegeben ist ein Max-flow Problem mit der folgenden Adjazenzliste für ein Netzwerk mit 6 Knoten

Knoten	Nachfolger,Kapazität c;
s	1,3; 2,8; 3,7
1	2,3; 3,5
2	4,9
3	4,4; t,4
4	t,13
t	

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (4 Punkte)

b) Sei

$$\begin{aligned}\tilde{f}^T &= \left(f_{(s,1)}, f_{(s,2)}, f_{(s,3)}, f_{(1,2)}, f_{(1,3)}, f_{(2,4)}, f_{(3,4)}, f_{(3,t)}, f_{(4,t)}\right)\\ &= (3, \quad 6, \quad 7, \quad 3, \quad 0, \quad 9, \quad 3, \quad 4, \quad 12)\end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ ein zulässiger Fluss ist. (5 Punkte)

c) Betrachtet wird nun obiges Netzwerk, das nach dem Hinzufügen der Kante (t, s) mit einer Kapazität von ∞ entsteht. Seien $J_\gamma = \{k | f_k = c_k\}$ und $J_\delta = \{k | f_k = 0\}$ für $f^T = \left(\tilde{f}^T, f_{(t,s)}\right)$ mit $\tilde{f}$ aus Teilaufgabe b) und die Matrix A die zugehörige Adjazenzmatrix. Finden Sie eine optimale Lösung $g^* \in \mathbb{R}^{10}$ für $DRP(f)$:

$$\max g_1$$

$$s.t. \begin{pmatrix} E \\ A \\ E^{(J_\gamma)^T} \\ -E^{(J_\delta)^T} \end{pmatrix} g \leq \begin{pmatrix} 1^{10} \\ 0^6 \\ 0^{|J_\gamma|} \\ 0^{|J_\delta|} \end{pmatrix}$$

$$g_i \in \{-1,0,1\}$$

(10 Punkte)

d) Sei die Menge $M = \{f + \lambda_0 \cdot g \mid f + \lambda_0 \cdot g$ ist ein zulässiger Fluss und $\lambda_0 \geq 0\}$ gegeben. Bestimmen Sie λ_0, sodass $f + \lambda_0 \cdot g$ ein Fluss aus M mit größtem Zielfunktionswert ist. Hierbei sind f und g Teilaufgabe c) zu entnehmen. Haben Sie in Teilaufgabe c) keine Lösung gefunden, so gehen Sie von $f^T = (1, 8, 7, 1, 0, 9, 3, 4, 12, 16)$ und $g^T = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ aus. (7 Punkte)

e) Begründen Sie mit Hilfe des minimalen Schnitts im gegebenen Netzwerk, warum der Fluss $f + \lambda_0 \cdot g$, den Sie in Teilaufgabe d) ermittelt haben, ein maximaler Fluss ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4 (Nordwest-Eckenregel) **[12 Punkte]**

Sei das folgende Transportproblem mit Angebotsvektor
$a^T = (8, 5, 4)$, Nachfragevektor $b^T = (4, 3, 7, 3)^T$ und Kostenmatrix

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & X & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie eine zulässige Basislösung mithilfe der Nordwest-Eckenregel.

(4 Punkte)

b) Finden Sie für den Eintrag $c_{2,3} = X$ in der obigen Kostenmatrix C alle $X \geq 0$, sodass die in Teilaufgabe a) gefundene Basislösung bereits optimal ist. (8 Punkte)

Aufgabe 5 (Ganzzahlige Optimierung) **[15 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

Minimiere $-x_2$
s. t.
$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$
mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ und x_1, x_2, x_3, x_4 ganzzahlig!

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (9 Punkte)

b) Führen Sie einen Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. (6 Punkte)