Platz-Nr.: ____________

Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2020/2021

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	04.03.2021
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 5 (fünf) Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[28 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja" oder „nein" beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Sind x und y optimale Basislösungen, so ist auch $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$ eine optimale Basislösung. (5 Punkte)

These 2: Handelt es sich bei dem Pivotverfahren nicht um die smallest subscript rule, so terminiert der Simplexalgorithmus nicht. (5 Punkte)

These 3: Sei das lineare Programm (P) $\max c^T x,\ \ s.t.\ Ax = b,\ x \geq 0$ gegeben mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\pi \in \mathbb{R}^m$ die Gleichung $b^T\pi = c^T x$, so ist x optimal für (P) und π ist optimal für das duale Problem von (P). (6 Punkte)

These 4: Ist die im Primal-dualen Simplexverfahren gefundene primale Lösung zulässig, so ist diese auch optimal. (5 Punkte)

These 5: Sei ein Transportproblem mit Angebotsvektor $(5 \quad 6 \quad 1 \quad 7)$ und Nachfragevektor $(4 \quad 8 \quad 7)$ gegeben. Dann ist

$$X = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(mit x_{ij} = Anzahl an Einheiten, die von Anbieter i zu Nachfrager j transportiert wird) eine zulässige Basislösung. (7 Punkte)

Aufgabe 2 (Maximaler Fluss) **[24 Punkte]**

Sei das folgende Adjazensliste gegeben:

Knoten i	Nachfolger j, Kantenkapazität $c_{i,j}$; ...
s	1,7 ; 2,9
1	2,5,; 3,2; 4,4
2	4,5
3	4,2; 5,3
4	5,5; t,6
5	t,7
t	

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (3 Punkte)

b) Finden Sie einen maximalen s-t-Fluss mithilfe des Ford-Fulkerson Algorithmus´.
(13 Punkte)

c) Das Problem mit m Kanten lässt sich mithilfe aller s-t-Pfade $C_1, \ldots., C_p$ des Netzwerks wie folgt als lineares Programm darstellen:

$$\min(-1^p, 0^m) \cdot \binom{f}{s}$$

$$s.t. (D, E_m) \cdot \binom{f}{s} = b$$

$$f, s \geq 0$$

wobei $f \in \mathbb{R}^p, s \in \mathbb{R}^m, D \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Außerdem ist $b \in \mathbb{R}^m$ der Kantenkapazitätsvektor. Der Eintrag (i, j) der Matrix D lautet

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Pfad } \mathrm{C_j} \text{ Kante i enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gelte die folgende Korrespondenz:

Zeile von (D, E_m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Kante	$s,1$	$s,2$	1,2	1,3	1,4	2,4	3,4	3,5	4,5	$4,t$	$5,t$

Ist die zulässige Basis bezüglich der gegebenen inversen Basismatrix optimal? Geben Sie andernfalls einen verbessernden Pfad an, der in die Basis aufgenommen wird.
(Die inverse Basismatrix finden Sie auf der nächsten Seite)

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nur die ersten beiden Spalten der Matrix A_B stellen s-t-Pfade dar. (8 Punkte)

Aufgabe 3 (Tableaus) **[17 Punkte]**

Sei ein lineares Programm der Form

$$\min(-4 \quad -5 \quad -7)x$$
$$s.t.\,(A, E_3) \cdot \binom{x}{s} = b$$
$$x, s \geq 0$$

gegeben, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $x, s, b \in \mathbb{R}^3$ und $E_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix ist.

a) Nach der Anwendung des Simplexverfahrens erhält man folgendes Tableau:

Variablen	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
55/3	16/3	0	0	1/3	0	5/3
31/18	7/18	1	0	2/9	0	-1/18
16/9	-17/9	0	0	-11/9	1	-4/9
25/18	19/18	0	1	-1/9	0	5/18

Nennen Sie alle Basisvariablen. (2 Punkte)

b) Sei nun das folgende lineare Programm gegeben:

$$\min(c_0 \quad -4 \quad -5 \quad -7)x$$
$$s.t. \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, A, E_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x \\ s \end{pmatrix} = b$$
$$x_0, x, s \geq 0$$

mit A, x, s wie in Teilaufgabe a) und $c_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Wie würde sich durch das Einfügen der Variable x_0 unter obiger Wahl der Basis (Teilaufgabe a)) das obige Tableau ändern? Geben Sie dazu die x_0-Spalte der Matrix $\bar{A}$ an. (8 Punkte)

c) Geben Sie alle $c_0 \in \mathbb{R}$ an, so dass diese Basislösung weiterhin optimal ist. Falls Sie in Teilaufgabe b) keine Lösung gefunden haben, wählen Sie den Vektor $\overline{a_0}^T = (1/3 \quad 2/3 \quad 4/3)$ (dies entspricht nicht der Lösung aus Teilaufgabe b)).

(7 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[21 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

Maximiere $5x_1 + 6x_2$

s. t.

$10x_1 + 6x_2 + x_3 = 20$

$6x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ und x_1, x_2, x_3, x_4 ganzzahlig!

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren, unter der Verwendung der smallest subscript rule. (10 Punkte)

b) Fügen Sie den **ersten** Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. (7 Punkte)

c) Drücken Sie den ersten in Teilaufgabe b) ermittelten Schnitt unter ausschließlicher Verwendung der Variablen x_1 und x_2 aus. (4 Punkte)