Platz-Nr.: ____________

Name: _________________________ Vorname: _______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2021

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	21.09.2021
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen fünf Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[22 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Wir betrachten ein lineares Programm in Standardform mit einer total unimodularen Matrix A. Dann existiert zu jeder nicht-ganzzahligen Lösung eine ganzzahlige Lösung, die hinsichtlich des Zielfunktionswertes nicht schlechter ist. (5 Punkte)

These 2: Sei ein lineares Programm gegeben, welches mehrere verschiedene zulässige Basislösungen besitzt. Dann gibt es für zwei beliebige zulässige Basislösungen immer eine signifikante Hyperebene bezüglich des Lösungsraums, die beide Basislösungen enthält. (5 Punkte)

These 3: Sei ein lineares Programm in Standardform gegeben, für das eine zulässige duale Lösung π existiert, die keinen Schlupf aufweist. Dann ist jede primale zulässige Basislösung auch optimal. (5 Punkte)

These 4: Sei das lineare Programm

$$\max\ c^T x$$
$$s.t.\, ax_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$3x_1 + x_2 + \quad x_4 = 4$$
$$x_i \geq 0$$

gegeben. Die Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist genau dann eine Basismatrix A_B für eine zulässige Basislösung x_B (als Teilmatrix der Ausgangsmatrix A) des obigen linearen Programms, wenn $a \geq 9$ ist. (7 Punkte)

Aufgabe 2 (Maximaler Fluss und Ford Fulkerson Algorithmus) **[7 Punkte]**

Wir betrachten das Max-Flow Problem

$$\max f_1, s.t. \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} \cdot f \leq \begin{pmatrix} 0^m \\ c \end{pmatrix}, f \geq 0$$

mit n Kanten und m Knoten. Erklären Sie kurz mit eigenen Worten, warum der Ford-Fulkerson Algorithmus für alle möglichen positiven ganzzahligen Parameterbelegungen des obigen Modells terminiert. Welcher Teil des Algorithmus‘ kann im schlimmsten Fall zu verlängerten Rechnungen führen? (7 Punkte)

Aufgabe 3 (kürzeste Wege Problem) **[18 Punkte]**

Sei die folgende Knoten-Kanten-Adjazenzmatrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dabei korrespondiert die i-te Zeile zum i-ten Knoten. Außerdem seien die Kantengewichte

$$c = (3 \quad ,5 \quad ,5 \quad ,7 \quad ,1 \quad ,6 \quad ,5 \quad ,8 \quad ,4)$$

gegeben.

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen. (5 Punkte)

b) Finden Sie einen kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 6 mithilfe des Dijkstra-Algorithmus‘. (8 Punkte)

c) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung für den obigen Graphen bei beliebig wählbaren Kantengewichten:

Haben alle Kanten unterschiedliche Gewichte ($c_{e_1} = c_{e_2} \Leftrightarrow e_1 = e_2$), dann gibt es einen eindeutigen kürzesten Weg. (5 Punkte)

Aufgabe 4 (Transportproblem) **[25 Punkte]**

Sei ein Transportproblem mit 4 Anbietern und 5 Nachfragern gegeben. Es liegen der Angebotsvektor $a = (4,5,3,7)$, der Nachfragevektor $b = (3,3,6,5,2)$, sowie die Kostenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

vor.

a) Zeigen Sie mithilfe des reduziert primalen Problems $RP(\pi)$ mit

$$\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = (2,1,0,1 \mid 0,2,1,1,4),$$

dass π nicht optimal für das duale Problem des Transportproblems ist. (10 Punkte)

b) Es wird nun das MODI-Verfahren auf das obige Problem angewendet.

i) Warum ist die folgende Lösung als Startlösung zulässig?

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 Punkte)

ii) Zeigen Sie, dass die Lösung aus Teilaufgabe i) mindestens eine Variable besitzt, die negative reduzierte Kosten aufweist. (Hinweis: Hier könnte das MODI-Verfahren nützlich sein.) (10 Punkte)

Aufgabe 5 (Ganzzahlige Optimierung) **[18 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

Maximiere $2x_1 + 3x_2$

s. t.

$2x_1 + x_3 = 3$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ und x_1, x_2, x_3, x_4 ganzzahlig!

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren, unter der Verwendung der smallest subscript rule. (8 Punkte)

b) Fügen Sie den **ersten** Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. (7 Punkte)

c) Drücken Sie den ersten in Teilaufgabe b) ermittelten Schnitt unter ausschließlicher Verwendung der Variablen x_1 und x_2 aus. (3 Punkte)