Platz-Nr.: ____________

Name: _________________________ Vorname: _______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2022

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	30.09.2022
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 3 (drei) Seiten.

Unterschrift: ____________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[36 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Sei ein lineares Programm mit rationalen Parametern gegeben. Dann gibt es keine irrationale optimale Lösung. (7 Punkte)

These 2: Besitzt ein lineares Programm genau eine zulässige Basislösung, so ist diese Lösung optimal. (7 Punkte)

These 3: Sei ein lineares Programm gegeben, auf das der Simplex-Algorithmus angewendet wird, der nun einen Zyklus erzeugt. Dann sind alle Basislösungen innerhalb des Zyklus‘ primal degeneriert. (7 Punkte)

These 4: Sei ein lineares Programm der Form $\min c^T x\,, s.t. Ax = b, x \geq 0$ gegeben. Darüber hinaus seien eine optimale primale Lösung x^* und eine optimale duale Lösung π^* dieses linearen Programms gegeben. Dann ist es möglich, dass für $x_i^* \neq 0$ die zugehörige Nebenbedingung im dualen (mit zugehöriger Spalte von x_i^*) durch Anwenden von π^* positiven Schlupf aufweist. (8 Punkte)

These 5: Sei das lineare Programm (P) $\max c^T x,\ s.t. Ax \leq b, x \geq 0$ gegeben. Dann ist der Zielfunktionswert jeder zulässigen dualen Lösung eine obere Schranke für (P). (7 Punkte)

Aufgabe 2 (Netzwerkprobleme) **[40 Punkte]**

Sei die folgende Knoten-Kanten-Adjazenzmatrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei die i-te Zeile zum i-ten Knoten korrespondiert. Die Kantenkosten sind dem Vektor $c^T = (6, 8, 11, 4, 9, 1, 4, 2, 12, 3)$ zu entnehmen.

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (4 Punkte)

b) Es wird der Primal-Duale Simplexalgorithmus angewendet, um einen kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 6 zu finden. Im Laufe des Verfahrens liegt die duale Lösung $\pi^T = (10, 10, 6, 5, 3)$ vor.

  i. Ermitteln Sie eine optimale $\bar{\pi}$ Lösung für $DRP(\pi)$. (12 Punkte)

  ii. Zeigen Sie, dass die aktualisierte duale Lösung (auf Grundlage der in i. ermittelten Lösung) optimal für das Ursprungsproblem ist. (12 Punkte)

c) Nun werden die Kantenkosten als Kantenkapazitäten aufgefasst. Ermitteln Sie durch Anwendung des Ford-Fulkerson Algorithmus einen maximalen 1-6-Fluss. Geben Sie in jedem Schritt den augmentierenden Pfad an. (12 Punkte)

Aufgabe 3 (MODI-Verfahren) **[14 Punkte]**

Gegeben sei das ausbalancierte Transportproblem mit dem Angebotsvektor $a = (7, 3, 5, 2)$ und dem Nachfragevektor $b = (6, 5, 6)$. Die Kostenmatrix lautet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mithilfe der Nord-West-Eckenregel eine initiale Basislösung. (5 Punkte)

b) Führen Sie eine Iteration des MODI-Verfahrens auf die in Teilaufgabe a) ermittelte Lösung durch. Geben Sie die neue Basislösung und den Zielfunktionswert an. (9 Punkte)