Name: ___________________________ Vorname: _________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2022/2023

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	07.02.2023
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Thesen) **[26 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Der Schnitt einer signifikanten Hyperebene und einem Polytop (polytope) ist ein Extremalpunkt. (5 Punkte)

These 2: Sei ein lineares Programm in Standardform mit einer total unimodularen Matrix A gegeben. Dann sind alle optimalen Lösungen ganzzahlig. (6 Punkte)

These 3: Sei ein Transportproblem mit Angebotsvektor $a^T = (2 \quad 4 \quad 6)$ und Nachfragevektor $b^T = (5 \quad 7)$ und eine duale zulässige Lösung $\pi^T = (\alpha, \beta)$ mit $\{(i,j) | \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1)\}$ gegeben. Dann ist π optimal für das duale Problem. (7 Punkte)

These 4: Sei das folgende lineare Programm gegeben:

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

$$s.t. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = b$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 x_8 \geq 0$$

Darüber hinaus sei zur Basis $B(1) = 1, B(2) = 2, B(3) = 4, B(4) = 7$ die zugehörige duale Lösung $\pi^T = \frac{1}{16}(-39 \quad -92 \quad 0 \quad -29)$ gegeben. Dann gilt

$$c_1 = -10, \quad c_2 = -13, \quad c_4 = -7.$$ (8 Punkte)

Aufgabe 2 (Maximaler Fluss) **[22 Punkte]**

Sei das folgende Netzwerk in Form einer Adjazensliste gegeben:

Knoten i	Nachfolger j, Kantenkapazität $c_{i,j}$; ...
s	1,8 ; 2,6
1	3,4; 4,3
2	4,7;
3	4,2; t,6
4	t,6;
t	

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (4 Punkte)

b) Finden Sie einen maximalen s-t-Fluss mithilfe des Ford-Fulkerson Algorithmus´. Geben Sie in jedem Schritt den augmentierenden Pfad an. (8 Punkte)

c) Finden Sie einen minimalen Schnitt. (4 Punkte)

d) In der Vorlesung haben Sie einen Ansatz kennengelernt, bei dem das Problem des maximalen Flusses mithilfe des revidierten Simplexverfahrens gelöst werden kann. Beschreiben Sie das zugrundeliegende lineare Programm. Wie lässt sich eine Variable mit kleinsten reduzierten Kosten zu einer gegebenen Basis bestimmen? (6 Punkte)

Aufgabe 3 (Modi-Verfahren) **[19 Punkte]**

Sei ein ausgeglichenes Transportproblem mit Angebotsvektor $a^T = (5 \quad 12 \quad 13 \quad 8)$ und Nachfragevektor $b^T = (15 \quad 11 \quad 12)$, sowie den Transportkosten

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Basislösung mithilfe der Nord-West-Eckenregel. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Kosten, die Ihre Lösung aus Teilaufgabe a) verursacht. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die reduzierten Kosten dieser Lösung. Gibt es weitere Basislösungen, die die gleichen Kosten verursachen? Begründen Sie dies. (7 Punkte)

d) Bestimmen Sie mithilfe der largest-coefficient-rule die nächste verbessernde Basislösung. (5 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[23 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } 2x_1 + x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\
&2x_1 - 4x_2 + x_4 = 16 \\
&\text{mit } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplex-verfahren. (10 Punkte)

b) Erzeugen Sie die erste Verzweigung des aus der Vorlesung bekannten Branch and Bound Verfahrens. Verzweigen Sie dazu im Wurzelknoten über x_1 und berechnen Sie die Schranken der beiden neu erzeugten Knoten, falls diese existieren. Beschreiben Sie, wie, aufgrund Ihrer erzielten Ergebnisse, das Verfahren weiter abläuft. (13 Punkte)