Platz-Nr.: ____________

Name: _________________________ Vorname: _______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2023

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	27.09.2023
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ____________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[25 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Ein Eckpunkt eines Polyeders ist immer darstellbar als eine strikte Konvexkombination zweier unterschiedlicher Elemente des Polyeders. (5 Punkte)

These 2: Die Vereinigung zweier konvexer Mengen ist konvex. (5 Punkte)

These 3: Sei ein lineares Programm mit den Restriktionen

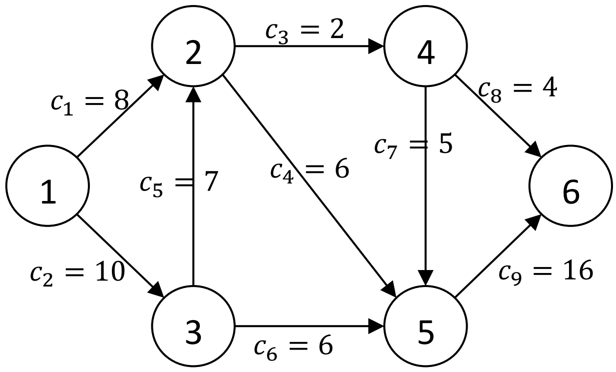
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, x \geq 0$$

gegeben. Dann führt die Lösung $x = (2,4,2)^T$ zu einer zulässigen Basislösung für das Problem in Standardform. (10 Punkte)

These 4: Sei die LP-Relaxierung des ausbalancierten Transportproblems gegeben. Dann ist jede zulässige Basislösung ganzzahlig. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Revidierter Simplexalgorithmus und Max-Flow) **[22 Punkte]**

Sei das folgende Netzwerk gegeben:



Das lineare Programm für das 1-6-Max-Flow-Problem, bei dem die Variablen zu Pfaden korrespondieren, liegt nun vor. Dabei entspricht die i-te Zeile des LPs der Kante i mit Kosten c_i. Es liegt nun eine Basislösung mit folgender inverser Basismatrix vor:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nur die ersten drei Spalten der Matrix A_B stellen Pfade dar.

a) Ermitteln Sie den Wert des Flusses dieser Basislösung. (7 Punkte)

b) Begründen Sie, warum es nicht möglich ist, einen Fluss zu finden, der einen Wert aufweist, der größer ist als 14. Nutzen Sie dazu das Max-Flow-Min-Cut-Theorem. (5 Punkte)

c) Finden Sie einen Pfad mit negativen reduzierten Kosten. (10 Punkte)

Aufgabe 3 (Ausbalanciertes Transportproblem) **[25 Punkte]**

Gegeben seien die folgende Kostenmatrix, Angebotsvektor und Nachfragevektor:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}, a = (9,12,8)^T, b = (10,8,4,7)^T$$

a) Bestimmen Sie mithilfe der Nordwesteckenregel eine initiale Basislösung für das MODI-Verfahren. (5 Punkte)

b) Führen Sie eine Iteration des MODI-Verfahrens aus und geben Sie den Zielfunktionswert der neuen Lösung an. (8 Punkte)

c) Sei y die duale Lösung, die Sie in Teilaufgabe b) zur Bestimmung der reduzierten Kosten der initialen Basislösung ermittelt haben. Warum ist y keine zulässige Startlösung für das Alpha-Beta-Verfahren?
(Wenn Sie bei den vorherigen Teilaufgaben keine Lösungen ermitteln konnten, begründen Sie kurz allgemein, warum es sein kann, dass eine duale Lösung, die im MODI Verfahren bestimmt wurde, nicht als Startlösung für das Alpha-Beta-Verfahren verwendet werden kann.) (3 Punkte)

d) Die duale Lösung $\pi^T = (\alpha, \beta)$ mit $\alpha = (0,4,-2), \beta = (3,4,2,3)$ ist eine optimale duale Lösung. Finden Sie mithilfe von π eine optimale primale Lösung. (9 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[18 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&\quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\
&-2x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\
&\quad x_2 + x_5 = 1 \\
&\text{mit } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie eine optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Fügen Sie den **ersten** Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. (8 Punkte)