Platz-Nr.: ____________

Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2023

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	27.02.2024
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt sechs Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1:

Wird der Algorithmus von Dijkstra auf einen Baum angewendet, so löst er dort das Single Source Shortest Path Problem in korrekter Weise auch dann, wenn negative Kantengewichte vorhanden sind (es gilt also nicht mehr notwendigerweise $c_{ij} \geq 0$ für eine Kante $(i,j) \in E$).

Hinweis: Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen, bei dem es zwischen zwei unterschiedlichen Knoten i,j nur höchstens einen Pfad gibt. (7 Punkte)

These 2:

Sei $x = (4,2)^T$ eine **zulässige** Lösung des primalen linearen Programms $(P) \min c^T x\,, s.t.\, A \cdot x \geq b, x \geq 0$ mit:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zwei der folgenden drei dualen Lösungen sind nicht zulässig für das zugehörige duale Problem (D). Entscheiden Sie begründet, welche:

$\pi^1 = (4,2,2)^T,\ \pi^2 = (0,1,4)^T,\ \pi^3 = (5,6,1)^T$ (8 Punkte)

These 3:

Der Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^n$ ist eine zulässige Basislösung für jedes lineare Programm, das einen beschränkten Lösungsraum und mindestens eine optimale Lösung besitzt. (5 Punkte)

These 4:

Wir betrachten das Dictionary am Ende der Phase 1 innerhalb der Zwei-Phasen-Methode. Wir nehmen an, dass der gefundene optimale Zielfunktionswert gleich Null ist. Dann können wir in jedem Fall durch Streichung der Hilfsvariablen und Substitution der Zielfunktion direkt mit der zweiten Phase beginnen. (5 Punkte)

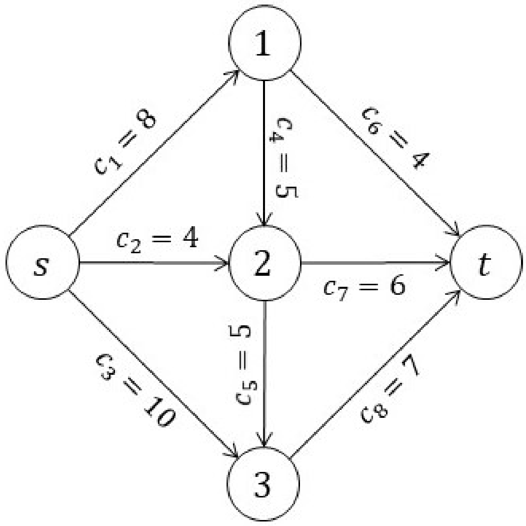
These 5:

Sei (P) ein zulässiges Lineares Programm mit Lösungsraum $P \in \mathbb{R}^n$. Dann lässt sich jede zulässige Lösung $z \in P$ darstellen als Konvexkombination von Extrempunkten von P $[\varepsilon(P)]$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 (Maximaler Fluss) **[22 Punkte]**

Gegeben sei das folgende s-t-Netzwerk $N = (V, E; s, t, c)$:



Außerdem sei der Fluss $f = (8, 1, 7, 5, 0, 3, 6, 7)^T$ gegeben. Die Nummerierung der Kanten können Sie dem Graphen entnehmen.

a) Überprüfen Sie f auf Zulässigkeit. (5 Punkte)

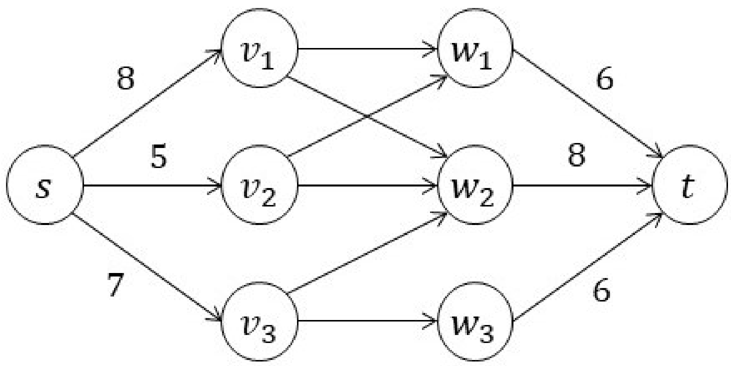
b) Stellen Sie das zugehörige reduzierte Netzwerk (Residualnetzwerk) auf und bestimmen einen flussvergrößernden Weg. Aktualisieren Sie f und merken Sie an, wie sich der Fluss auf den Kanten verändert. (6 Punkte)

c) Geben Sie einen minimalen Schnitt $Q = (W, W^C)$ in dem Netzwerk an und zeigen Sie die Optimalität. (5 Punkte)

d) In einem beliebigen Netzwerk N gibt es nun mehrere Source-Knoten $s_1, \ldots, s_k$ und mehrere Sink-Knoten $t_1, \ldots, t_p$. Ihre Aufgabe ist es, so viele Einheiten wie möglich von den Source-Knoten zu den Sink-Knoten zu schicken. Skizzieren Sie eine mögliche Transformation dieser Problemstellung in ein äquivalentes Problem, so dass sich anschließend das entstehende Problem direkt mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson lösen lässt. (6 Punkte)

Aufgabe 3 (Ausbalanciertes Transportproblem) **[16 Punkte]**

Bei der Anwendung des Alpha-Beta-Algorithmus wird in einer betrachteten Iteration das Problem $RP(\pi)$ gelöst. Der folgende Graph ist bei dieser Bearbeitung entstanden:



a) Bestimmen Sie die optimale Lösung von $RP(\pi)$ in der Form $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$.

Sie können die flussvergrößernden Wege ohne detaillierte Rechnung angeben.

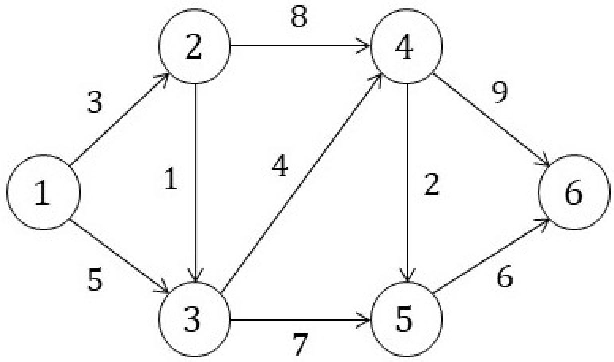
(6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die optimale Lösung von $DRP(\pi)$. Ist die aktuelle duale Lösung π optimal? (6 Punkte)

c) Begründen Sie kurz, warum eine Lösung, die alle der folgenden (oben dargestellten) Kanten $\{(v_1, w_1), (v_1, w_2), (v_2, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_2), (v_3, w_3)\}$ verwendet (also hierüber Transporte vornimmt), keine Basislösung sein kann. (4 Punkte)

Aufgabe 4 (Kürzeste Wege) **[12 Punkte]**

Gegeben sei der folgende Graph $G = (V, E, c)$ mit Kosten c:



a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Dijkstra den kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 6. Geben Sie auch dessen Länge an. (7 Punkte)

b) Im Folgenden sehen Sie die Matrizen, die bei der Anwendung des Algorithmus von Floyd-Warshall auf einen uns unbekannten Graphen entstanden sind. Geben Sie den kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 4 sowie die Länge dieses Weges an.

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (e_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

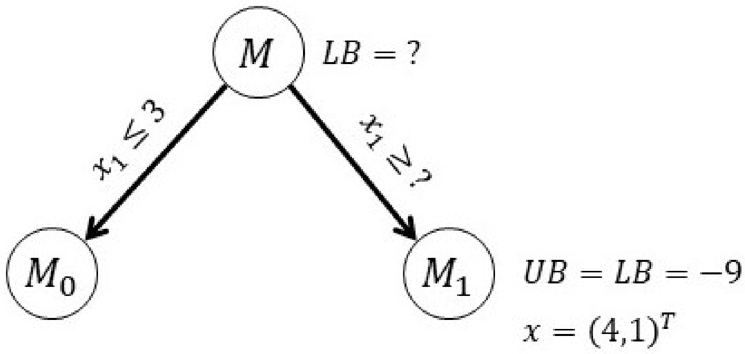
(5 Punkte)

Aufgabe 5 (Ganzzahlige Optimierung) **[10 Punkte]**

Wir betrachten ein ganzzahliges lineares **Minimierungs**problem, das mit dem Branch-and-Bound-Verfahren gelöst wird. Sie haben bereits das Ursprungsproblem (M) gelöst und das folgende Tableau erhalten:

$\frac{19}{2}$	0	0	0	$\frac{9}{14}$	$\frac{1}{14}$
2	0	0	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$
$\frac{7}{2}$	1	0	0	$\frac{5}{14}$	$-\frac{1}{14}$
$\frac{5}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$

Gegeben sei Ihnen außerdem der bisherige Branch-and-Bound-Baum:



a) Geben Sie die beiden fehlenden Werte aus dem Branch-and-Bound-Baum an.

(2 Punkte)

b) Geben Sie die zusätzliche Restriktion des Subproblems (M_0) an. Formen Sie diese so um, dass Sie sie in das Tableau von Problem (M) einfügen können.

(3 Punkte)

c) Nach dem Lösen des Subproblems (M_0) mit dem dualen Simplex-Algorithmus ergibt sich das folgende Tableau.

$\frac{43}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
$\frac{7}{5}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
3	1	0	0	0	0	1
$\frac{13}{5}$	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{7}{5}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{14}{5}$

Geben Sie die optimale Lösung von (M_0) und des Ursprungsproblems an. Begründen Sie Ihre Angaben. (5 Punkte)