Platz-Nr.: ____________

Name: _________________________ Vorname: _______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2024

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	12.09.2024
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen fünf Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 7 Seiten.

Unterschrift: ____________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[28 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1:

Wir betrachten das Single Source Shortest Path Problem (Kürzeste-Wege-Problem von einem gegebenen Knoten s zu allen anderen Knoten) in einem Graphen $G = (V, E)$ mit positiven sowie negativen Kantengewichten (d.h. $c_{ij} \geq 0$ gilt nicht mehr für alle $(i, j) \in E$). Dann führt der Dijkstra-Algorithmus zu einem korrekten Ergebnis, falls wir vorher alle Kantengewichte um einen konstanten Wert so erhöhen, dass alle Kantengewichte nun nicht-negativ sind:

$$c_{ij}^{neu} = c_{ij} + |\min\{c_{ij} | (i,j) \in E \ \wedge \ c_{ij} < 0\}| \quad \forall (i,j) \in E$$

(8 Punkte)

These 2:

Seien (P) ein lineares Maximierungsproblem mit $Max\ c^T \cdot x \ \ s.t. \ A \cdot x = b, x \geq 0$ und (D) das zugehörige duale Problem. Seien außerdem x zulässig für (P) und π zulässig für (D). Dann gilt $b^T\pi \geq c^T x$. (5 Punkte)

These 3:

Jede Basislösung eines linearen Optimierungsproblems entspricht einem Extrempunkt der zulässigen Menge dieses Optimierungsproblems. (5 Punkte)

These 4:

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ist total unimodular.

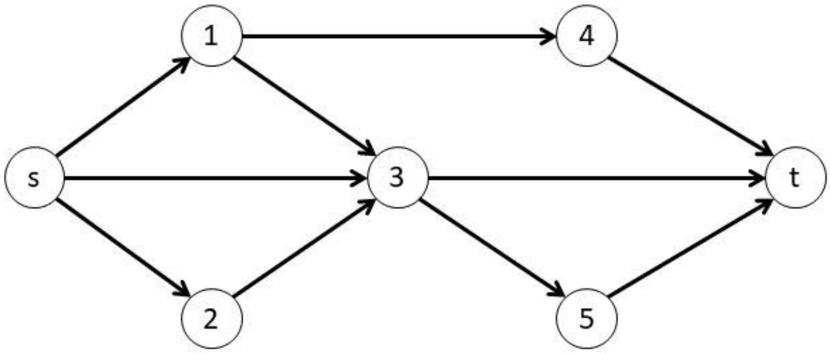
(5 Punkte)

These 5:

Sei (LP) die LP-Relaxierung eines ganzzahligen linearen Minimierungsproblems (IP) mit ganzzahligen Koeffizienten in Zielfunktion und Restriktionen. Dann liefert der aufgerundete Zielfunktionswert der optimalen Lösung von (LP) immer eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert von (IP). (5 Punkte)

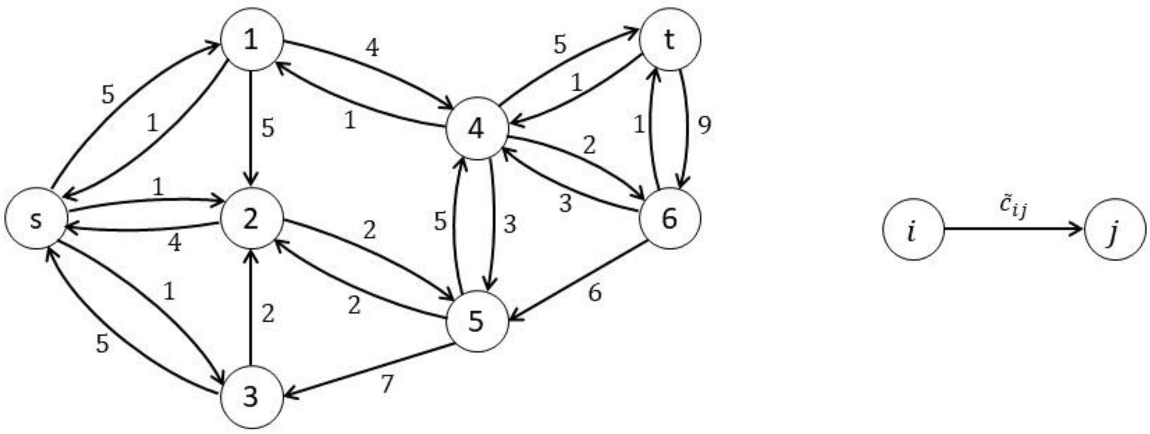
Aufgabe 2 (Maximaler Fluss) **[25 Punkte]**

Wir betrachten das Max-Flow-Problem in folgendem Netzwerk N mit Quelle s und Senke t:



a) Bestimmen Sie Kapazitäten c_{ij} für alle Kanten in N derart, dass $Q = (W, W^C) = (\{s, 1,2,3\}, \{4,5, t\})$ der eindeutige minimale Schnitt des Netzwerks N mit Kapazität 9 ist.
Geben Sie dann einen maximalen s-t-Fluss in G an und begründen Sie, warum dieser maximal ist. (10 Punkte)

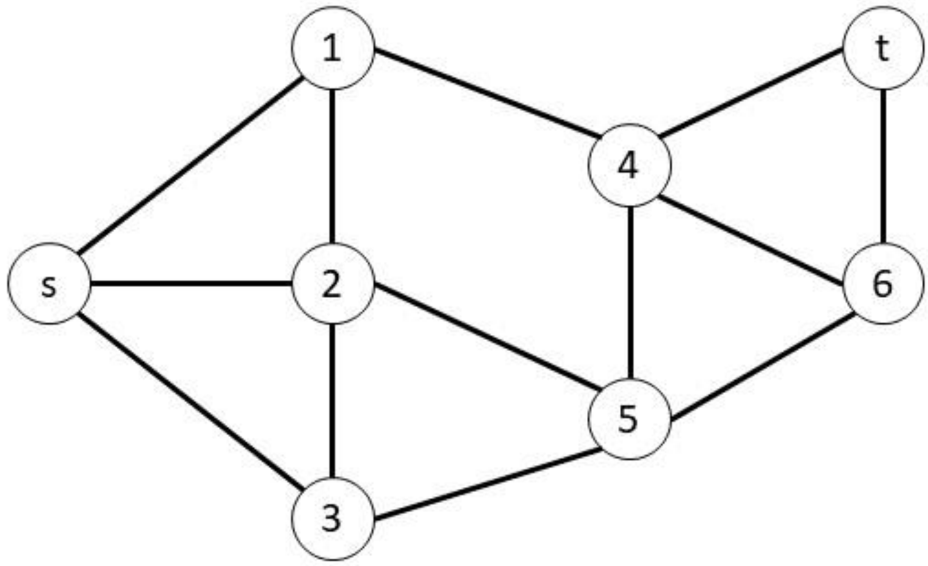
b) Betrachten Sie jetzt das folgende reduzierte Netzwerk (Residualnetzwerk) $N(f)$ zu einem Netzwerk $N = (V, E, c, s, t)$. Die Kapazitäten des reduzierten Netzwerks $\tilde{c}_{ij}$ $\forall (i, j) \in E_f$ sind unten angegeben:



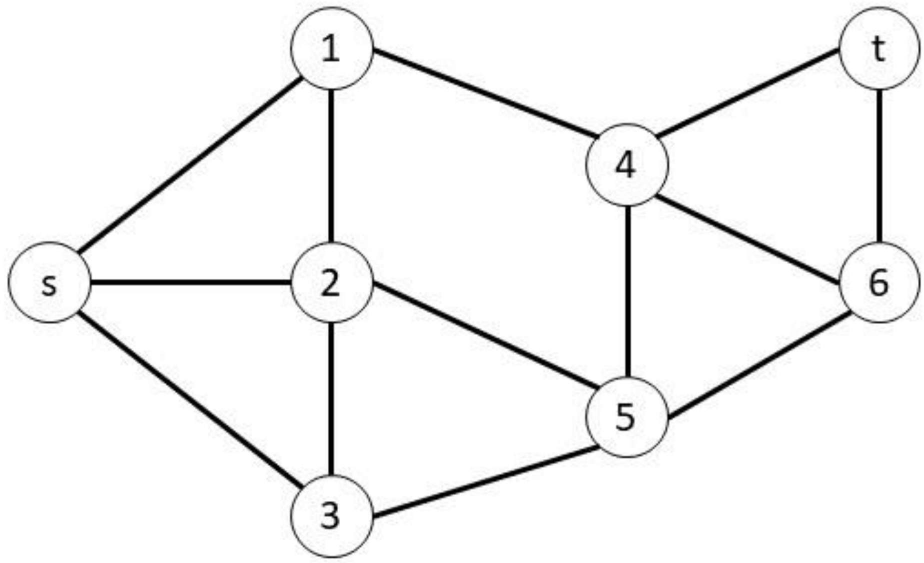
i. Geben Sie einen Fluss f an, der zu dem reduzierten Netzwerk $N(f)$ führt. (8 Punkte)

ii. Finden Sie flussvergrößernde Wege in $N(f)$ und geben Sie den maximalen Fluss an. Zeigen Sie, dass der gefundene Fluss maximal ist. Sie können die flussvergrößernden Wege ohne weitere Rechnung angeben. (7 Punkte)

Verwenden Sie für Aufgabe 2b) die folgenden Vorlagen. Denken Sie daran, die Richtungen der Kanten einzuzeichnen:



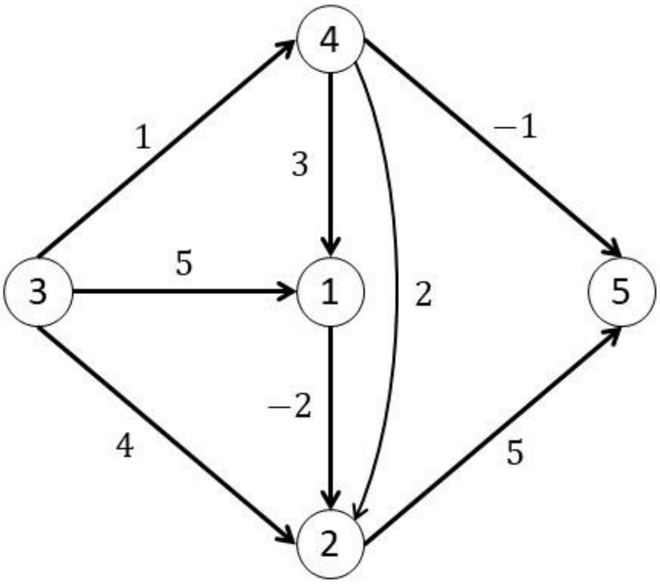
Aufgabenteil b)i.: Fluss f für $N(f)$



Aufgabenteil b)ii.: Maximaler Fluss in N

Aufgabe 3 (Kürzeste Wege) **[10 Punkte]**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit eingezeichneten Kantengewichten c_{ij}. Verwenden Sie den Algorithmus von Bellmann-Ford mit einer von Ihnen festgelegten Kantenreihenfolge, um die kürzesten Wege von Knoten 1 zu allen anderen Knoten zu bestimmen. Geben Sie dann den kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 5 sowie dessen Länge an.



Iter.	Label	1	2	3	4	5
0	$d(i)$					
	$\pi(i)$					
1	$d(i)$					
	$\pi(i)$					
2	$d(i)$					
	$\pi(i)$					
3	$d(i)$					
	$\pi(i)$					
4	$d(i)$					
	$\pi(i)$					

Aufgabe 4 (Dualer Simplex-Algorithmus und Gomory-Verfahren) [15 Punkte]

Betrachten Sie das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem (IP):

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 + 2x_2 \\
s.t. \quad & -2x_1 + x_2 \leq 0 \\
& 4x_1 - 4x_2 \leq -1 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

a) Verwenden Sie den primalen Simplex-Algorithmus, um eine optimale Lösung für die LP-Relaxation zu berechnen. Gehen Sie dabei davon aus, dass sich durch die Aufnahme der Strukturvariablen in die Basis eine zulässige Lösung bilden lässt. Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert an. (7 Punkte)

b) Fügen Sie einen Gomory-Schnitt in Ihr Problem ein und verwenden Sie den lexikographischen dualen Simplex-Algorithmus, um das entstandene Problem optimal zu lösen. Geben Sie die gefundene Lösung an sowie deren Zielfunktionswert. Hat sich der Zielfunktionswert im Vergleich zu Aufgabenteil a) verbessert oder verschlechtert? Begründen Sie kurz, warum das passiert ist. Ist die gefundene Lösung auch optimal für (IP)? (8 Punkte)

Aufgabe 5 (Modellierung) **[12 Punkte]**

Unten finden Sie eine, Ihnen aus der Vorlesung bekannte, Formulierung des ausbalancierten Transportproblems. Lieferanten $(1, \dots, m)$ beliefern hier Kunden $(1, \dots, n)$. Die Angebote a_i, die Bedarfe b_j und die Transportkosten c_{ij} sind gegeben.

Passen Sie dieses Transportproblem jeweils derart an, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind. Geben Sie dabei an, welche bestehenden Restriktionen angepasst/verworfen werden und welche Restriktionen Sie neu hinzufügen. Zudem dürfen Sie neue kontinuierliche und/oder binäre Variablen verwenden. Parameter dürfen Sie dagegen nicht verändern.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(ZF)} & \min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \\
\text{(I)} & s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\
\text{(II)} & & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\
\text{(III)} & & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \; \forall j = 1, \dots, n
\end{array}
$$

i. Kunde 3 kann nur von den Lieferanten 1, 2 und 3 beliefert werden. (3 Punkte)

ii. Es gibt in Summe mehr Angebot als Nachfrage, d.h. das Problem ist nicht mehr **ausbalanciert**. (3 Punkte)

iii. Jede Lieferung von Lieferant 1 zu einem Kunden verursacht nun zusätzlich Fixkosten pro Lieferung von einer Geldeinheit. (6 Punkte)