Platz-Nr.: ____________

Name: _________________________ Vorname: _______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2024/25

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	24.02.2025
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt **fünf** Seiten.

Unterschrift: ___________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[24 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1:

In einem s-t-Netzwerk $N = (V, E, c, s, t)$ mit paarweise verschiedenen Kosten $c_{i,j}$ der Kanten $(i, j) \in E$, d.h. $c_{ij} \neq c_{k\ell}$ für zwei verschiedene Kanten $(i, j), (k, \ell) \in E$, existiert immer ein eindeutiger minimaler Schnitt. (6 Punkte)

These 2:

Wir betrachten ein Max-Flow-Problem mit ganzzahligen Kanten-Kapazitäten. Dann findet der Algorithmus von Ford-Fulkerson in polynomieller Zeit einen maximalen Fluss. (7 Punkte)

These 3:

Besitzt ein beschränktes kontinuierliches lineares Optimierungsproblem genau eine zulässige Basislösung, so ist diese Basislösung optimal. (5 Punkte)

These 4:

Alle Basislösungen des folgenden linearen Optimierungsproblems sind ganzzahlig:

$$
\begin{aligned}
\min -3_1 + 5x_2 + 2x_5 \\
s.t.\; x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\
x_2 - x_4 + x_5 &= 0 \\
-x_1 + x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1, \dots, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem) **[20 Punkte]**

Betrachten Sie das ausbalancierte Transportproblem mit Angebotsvektor $a = (9,4,7,7)^T$ und Nachfragevektor $b = (8,7,12)^T$. Die Kosten für die Lieferung einer Einheit von Anbieter $i = 1, \ldots, 4$ zu Kunde $j = 1, \ldots, 3$ sind in der Kostenmatrix C gegeben:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

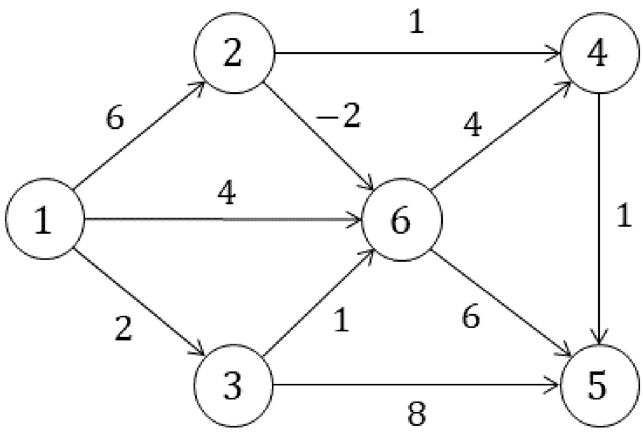
a) Gegeben sei die zulässige duale Lösung $\pi = (\alpha, \beta) = (2,1,1,0,1,0,2)^T$. Führen Sie ausgehend von dieser Lösung eine Iteration des Alpha-Beta-Algorithmus aus. Notieren Sie insbesondere die Menge IJ, alle flussvergrößernden Wege sowie die optimale Lösung des $DRP(\pi)$.
Hinweis: Sie können flussvergrößernde Wege ohne Nachweis angeben. (13 Punkte)

b) Liefert die in b) gefundene Lösung für das $RP(\pi)$ eine optimale Lösung für das Ausgangsproblem? Argumentieren Sie mit Hilfe der Optimalitätsbedingung des primal-dualen Simplex-Algorithmus. (3 Punkte)

c) Erklären Sie in wenigen Sätzen die Bedeutung der Menge IJ im Alpha-Beta-Algorithmus als primal-duales Verfahren. Gehen Sie dabei auch auf den Unterschied zwischen den Variablen $x_{ij} \in IJ$ und den Variablen $x_{ij} \notin IJ$ ein. (4 Punkte)

Aufgabe 3 (Kürzeste Wege) **[19 Punkte]**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten c_{ij}.



a) Erklären Sie, möglicherweise auch anhand eines Beispiels, warum die Anwendung des Verfahrens von Dijkstra für Graphen mit negativen Kantengewichten nicht immer zu korrekten Lösungen führt. (6 Punkte)

b) Wenden Sie trotzdem den Algorithmus von Dijkstra auf den obigen Graphen an. Verwenden Sie Knoten 1 als Ausgangsknoten. Geben Sie dann den kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 6 sowie dessen Länge an. (7 Punkte)

c) Erklären Sie, warum in Aufgabe b) der Algorithmus von Dijkstra trotz des negativen Kantengewichts zum richtigen Ergebnis führt. Ändern Sie dann genau ein Kantengewicht derart, dass der Algorithmus von Dijkstra nicht mehr zum richtigen Ergebnis führt. Begründen Sie Ihre Modifikation. (6 Punkte)

Aufgabe 4 (Branch and Bound und Geometrische Zusammenhänge) [27 Punkte]

Betrachten Sie das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem (IP). Seine LP-Relaxation (P) ergibt sich aus dem Wegfallen der Ganzzahligkeits-Bedingungen.

$$\begin{array}{lrl}
\max & x_1 + x_2 & \\
s.t. & -2x_1 + x_2 \leq 0 & \text{(I)} \\
& 2x_1 + 2x_2 \geq 9 & \text{(II)} \\
& 8x_1 - x_2 \leq 27 & \text{(III)} \\
& x_1, x_2 \geq 0 & \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z} &
\end{array}$$

a) Zeichnen Sie die zulässige Menge der LP-Relaxation (P).
Hinweis: Gehen Sie in Ihrer Zeichnung von folgenden Wertebereichen aus:
$0 \leq x_1 \leq 10;\ 0 \leq x_2 \leq 10.$ (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, welche beiden signifikanten Hyperebenen für den Punkt $x = \left(\frac{3}{2}, 3\right)^T$ bereits in Ihrer Zeichnung enthalten sind. (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie graphisch eine optimale Lösung für (P). Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes. Ist diese Lösung auch optimal für (IP)? (5 Punkte)

d) Erzeugen Sie die erste Verzweigung des Branch-and-Bound-Baumes. (2 Punkte)

e) Lösen Sie **rechnerisch** die von Ihnen in d) erzeugten Teilprobleme und geben Sie jeweils die optimale Lösung des Teilproblems an. Verwenden Sie zum Lösen des Ursprungsproblems das untenstehende Start-Tableau. (12 Punkte)

	$\frac{27}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	9	0	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
x_4	18	0	0	3	1	1