Platz-Nr.: ____________

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2025

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	18.09.2025
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt **fünf** Seiten.

Unterschrift: ______________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[28 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja" oder „nein" beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1:

Jede zulässige Lösung eines linearen Optimierungsproblems kann als Konvexkombination von Extrempunkten der zulässigen Menge dargestellt werden. (5 Punkte)

These 2:

Beim Single-Source-**Longest**-Path-Problem wird in einem Graphen $G = (V, E, c)$ ohne Zyklus der längste Weg von einem Knoten $s \in V$ zu allen anderen Knoten gesucht. Hierfür ändern wir den Dijkstra-Algorithmus wie folgt: In jedem Schritt wird von allen noch nicht fixierten Knoten derjenige mit der längsten (statt kürzesten) bekannten Distanz zu s gewählt und damit der gefundene längste Weg zu diesem Knoten als Teilergebnis fixiert. Für diesen Knoten wird dann anschließend überprüft, ob über seine ausgehenden Kanten ein längerer (statt kürzerer) Weg zu anderen noch nicht fixierten Knoten gefunden werden kann. Wenn dies der Fall ist, wird für diese Knoten der Abstand und Weg von s korrigiert. Der derart angepasste Algorithmus findet immer die gesuchten längsten Wege von s zu allen anderen Knoten im Graphen. (10 Punkte)

These 3:

Betrachtet werden ein lösbares ganzzahliges lineares Optimierungsproblem mit Minimierungs-Zielfunktion (IP) sowie dessen LP-Relaxation (LP-R). Die optimale Lösung von LP-R liefert dann immer eine untere Schranke zu IP. (5 Punkte)

These 4:

Gegeben seien ein primales lineares Optimierungsproblem (P) sowie das zugehörige duale Problem (D). P ist wie folgt definiert: $\min c^T x, s.t.\ A \cdot x \geq b$ mit $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die primal zulässige Lösung $x = (6, -1)^T$ sei bekannt. Von den folgenden drei dualen Lösungen ist mindestens eine nicht zulässig für (D).

$$\pi^1 = (2, 2, 2)^T, \qquad \pi^2 = (2, 0, 1)^T, \qquad \pi^3 = (-1, 2, -3)^T$$

(8 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem) **[30 Punkte]**

Betrachten Sie das ausbalancierte Transportproblem mit Angebotsvektor $a = (8,4)^T$ und Nachfragevektor $b = (6,3,3)^T$. Die Kosten für den Transport einer Einheit von Anbieter i zu Kunde j sind in der folgenden Kosten-Matrix gegeben:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Koeffizientenmatrix des gegebenen Problems total unimodular ist und begründen Sie dann, warum jede optimale Basislösung des obigen LPs ganzzahlig ist. (8 Punkte)

b) Erklären Sie, warum $\sum_{i=1}^{m}\left(a_i \cdot \min\left\{c_{ij} \middle| j = 1, \dots, n\right\}\right)$ eine untere Schranke für die minimalen Kosten ist. (5 Punkte)

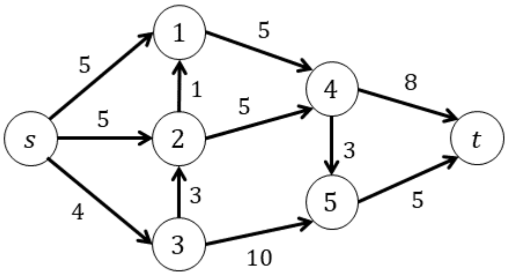
c) Berechnen Sie die in b) definierte untere Schranke für das gegebene Problem. Erklären Sie anschließend, welche Restriktion/Restriktionen des Transportproblems bei der Bestimmung dieser unteren Schranke ignoriert wird/werden. (4 Punkte)

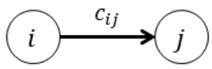
d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Nord-West-Eckenregel eine zulässige Lösung für das obige Problem und geben Sie deren Zielfunktionswert an. (3 Punkte)

e) Bestimmen Sie eine optimale Lösung mit Hilfe des MODI-Algorithmus. Weisen Sie deren Optimalität zusätzlich über die gefundene duale Lösung nach. (10 Punkte)

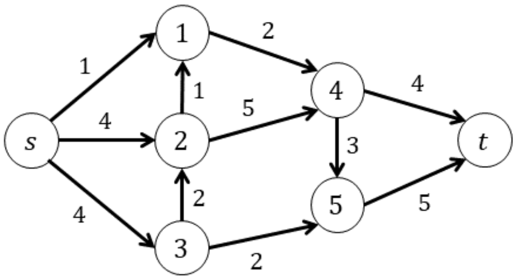
Aufgabe 3 (Netzwerkprobleme) **[12 Punkte]**

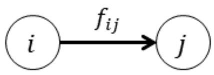
Betrachten Sie das folgende s-t-Netzwerk $N = (V, E, c, s, t)$ mit Kapazitäten c_{ij} für alle Kanten $(i, j) \in E$:





Gegeben sei außerdem der folgende Fluss f:





a) Bestimmen Sie, ausgehend von f, mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss in N. Geben Sie auch dessen Flusswert an. (10 Punkte)

b) Geben Sie einen minimalen s-t-Schnitte in N an. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (Gomory-Verfahren) **[20 Punkte]**

Gegeben sei das folgende ganzzahligse lineare Optimierungsproblem (IP):

$$\begin{array}{llcl} \min & 4x_1 - 3x_2 - x_3 & & \\ s.t. & x_1 + 3x_2 - 3x_3 & \leq & 2 \\ & -2x_1 \qquad\quad + 2x_3 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2, x_3 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus eine optimale Lösung der LP-Relaxation von IP und geben Sie deren Zielfunktionswert an. (6 Punkte)

b) Fügen Sie einen Gomory-Schnitt ein und berechnen Sie die optimale Lösung des entstehenden Problems unter Verwendung des lexikographischen Simplex-Algorithmus. Geben Sie auch den Zielfunktionswert an. Ist diese Lösung optimal für IP? (10 Punkte)

c) Erläutern Sie kurz, welche zwei Bedingungen ein Gomory-Schnitt im Hinblick auf die zulässige Menge (und den abgeschnittenen Teil der zulässigen Menge) erfüllt. (4 Punkte)