Platz-Nr.: ____________

Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2025/26

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	10.02.2026
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt **sechs** Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[25 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1:

Eine optimale Lösung eines linearen Optimierungsproblems kann nie als strikte Konvexkombination zweier Eckpunkte der zulässigen Menge dargestellt werden. (5 Punkte)

These 2:

Sei $N = (V, E, c)$ ein Netzwerk und f ein Fluss in N derart, dass alle Knoten in V die Flusserhaltungsgleichung erfüllen. Dann hat f einen Betrag von $|f| = 0$. (5 Punkte)

These 3:

Die folgende Matrix ist total unimodular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(5 Punkte)

These 4:

Tritt eine Variable x_k beim Simplex-Algorithmus durch einen Basiswechsel aus der Basis aus, so sind im Anschluss ihre reduzierten Kosten $\bar{c}_k$ nicht kleiner als 0. (5 Punkte)

These 5:

Gegeben seien ein lineares Optimierungsproblem (P) min $c^T x\,, s.t.\, A \cdot x \geq b, x \geq 0$ sowie das zugehörige duale Problem (D). Bekannt sind $b = (1, -3, 4, -1)^T$, $c = (3, 5, -2)^T$ und die für (P) zulässige Lösung $x = (2, -1, 4)^T$.

Dann ist $\pi = (4, 2, 1, 2)^T$ eine zulässige Lösung für (D). (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Transportproblem) **[27 Punkte]**

Betrachten Sie das ausbalancierte Transportproblem für $m = 3$ Anbieter und $n = 3$ Nachfrager mit Angebotsvektor $a = (4, 6, 5)^T$ und Nachfragevektor $b = (6, 3, 6)^T$. Die Kosten für den Transport einer Einheit von Anbieter i zu Kunde j sind in der folgenden Kosten-Matrix gegeben:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Erklären Sie, warum $\sum_{j=1}^{n} \left(b_j \cdot \min\left\{ c_{ij} \middle| i = 1, \dots, m \right\} \right)$ eine untere Schranke für die minimalen Kosten ist. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die in a) definierte untere Schranke für das gegebene Problem. Erklären Sie dann kurz, warum die hier bestimmte untere Schranke vermutlich nicht nah am optimalen Zielfunktionswert liegt. (5 Punkte)

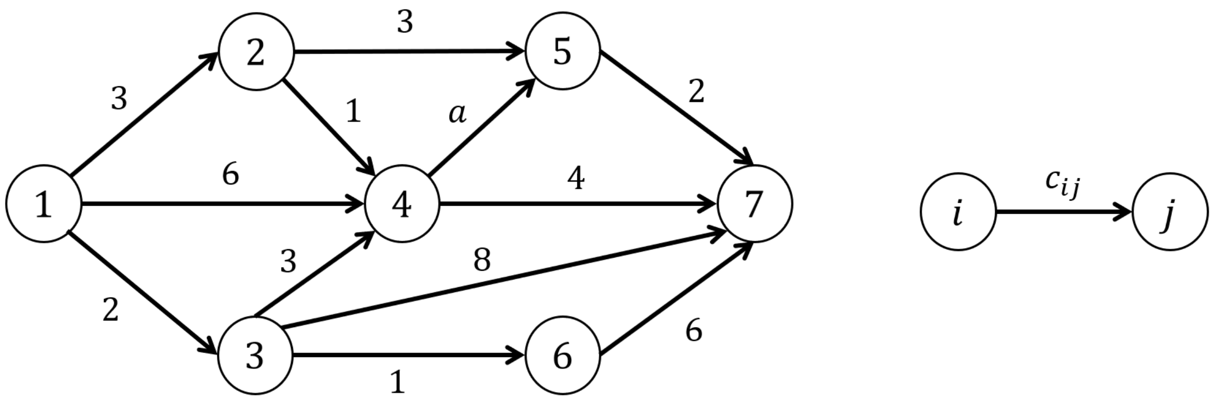
c) Erklären Sie die Bedeutung der Menge IJ im Alpha-Beta-Algorithmus als Spezialfall des primal-dualen Simplex-Algorithmus, insbesondere im Hinblick auf den komplementären Schlupf. (4 Punkte)

d) Führen Sie eine Iteration des Alpha-Beta-Algorithmus aus. Geben Sie dabei auch die Updates von $\bar{c}, \alpha$ und β an. Verwenden Sie zum Starten die zulässige duale Lösung $\pi = (\alpha, \beta) = (0, 5, 1, 1, 0, 2)$. (10 Punkte)
[Hinweis: Flussvergrößernde Wege können Sie ohne Nachweis angeben.]

e) Entscheiden Sie begründet, ob die in Aufgabenteil d) bestimmte Lösung optimal ist. (4 Punkte)

Aufgabe 3 (Kürzeste Wege) **[17 Punkte]**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E, c)$ mit Kantenkosten c_{ij} und Parameter $a \geq 0$:



a) Bestimmen Sie, ausgehend von Knoten 1, mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra die Länge der kürzesten Wege zu allen anderen Knoten in Abhängigkeit von a. (8 Punkte)

b) Geben Sie für $a = 1$ den kürzesten Weg von Knoten 1 zu Knoten 7 an. (4 Punkte)

c) Nehmen Sie begründet Stellung zur folgenden Aussage: „Ist mindestens ein Gewicht im Graphen negativ, so findet der Algorithmus von Dijkstra nicht die korrekten kürzesten Wege.“ (5 Punkte)

Aufgabe 4 (Gomory-Verfahren) **[21 Punkte]**

Gegeben sei das folgende ganzzahlige lineare Optimierungproblem (IP):

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ s.t.\ & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

a) Geben Sie anhand der Zeichnungen auf der nächsten Seite die optimale Lösung von IP x^* sowie die optimale Lösung seiner LP-Relaxation x_{LP}^* an. (3 Punkte)

b) Zeichnen Sie die Restriktion $2x_1 + 3x_2 \leq 15$ in eine der beiden Zeichnung auf der nächsten Seite ein. Erfüllt diese die Anforderungen an einen Gomory-Schnitt? (5 Punkte)

c) Es wurde nun mit Hilfe des Simplex-Algorithmus eine optimale Lösung x_{LP}^* der LP-Relaxation von IP berechnet. Gegeben ist das Endtableau der Rechnung. (Beachten Sie, dass das IP zunächst in ein Minimierungs-Problem umgewandelt wurde.)

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{25}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & \frac{7}{24} \\ \hline \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{24} \\ \frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{23}{24} & 1 & -\frac{7}{24} \\ \frac{9}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{array}$$

Bestimmen Sie nun einen Gomory-Schnitt und fügen Sie diesen in das optimale Tableau aus c) ein. Welche Variable muss für die Pivot-Operation des dualen lexikographischen Simplex ausgewählt werden?

Wie könnte ausgehend vom optimalen Tableau (alternativ zum Schnittebenverfahren) ein binäres Branching in einem Branch&Bound-Verfahren aussehen? (8 Punkte)

d) Erklären Sie kurz, warum immer bei dem obigen IP gelten muss: $c^T x^* \leq c^T x_{LP}^*$. Warum müssen Sie, um eine gültige obere Schranke zu erhalten, die LP-Relaxation zwingend optimal lösen? (5 Punkte)

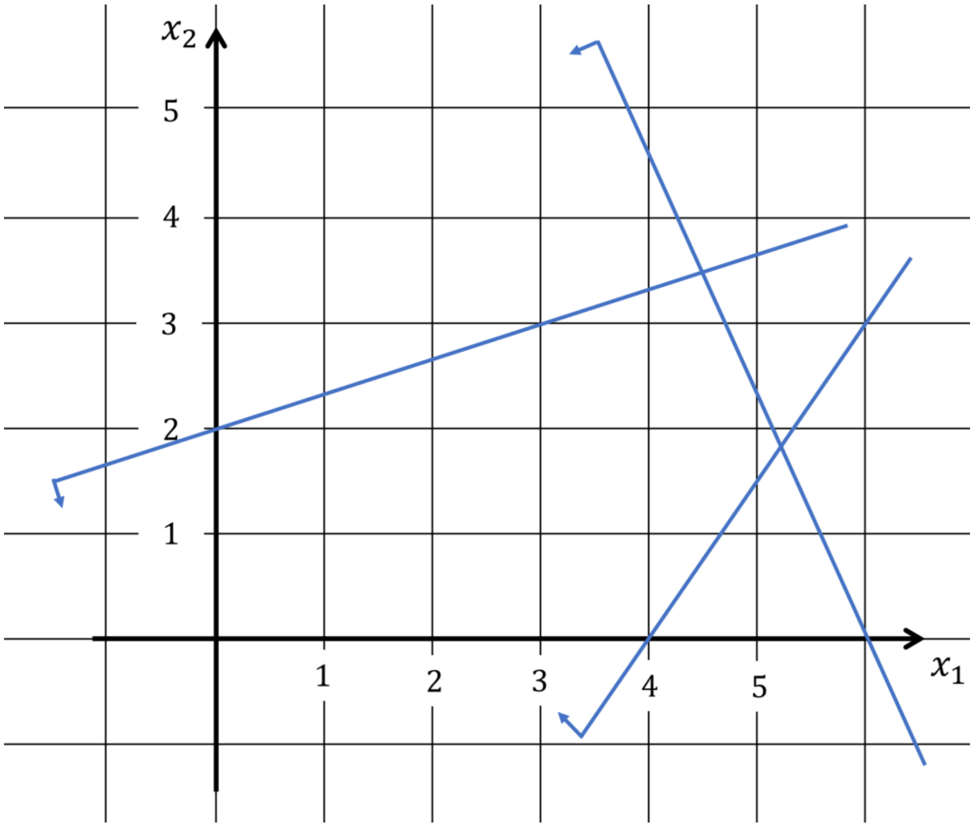


Illustration des Lösungsraums