Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FB B: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2017/2018

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	05.03.2018
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ____________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[27 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Seien x^1 und x^2 zulässige Basislösungen für $Ax = b$. Dann ist $\frac{2}{7}x^1 + \frac{5}{7}x^2$ ebenfalls eine zulässige Basislösung. (5 Punkte)

These 2: Sei ein lineares Programm in Standardform gegeben. Zu jeder Basis B existiert eine eindeutig bestimmte zulässige Basislösung x_B. (5 Punkte)

These 3: Sei A eine $m \times n$ Matrix mit $rank(A) = m < n$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \wedge x \geq 0\}$. Dann hat P mindestens $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$ viele Basislösungen.

(5 Punkte)

These 4: Sei $c = (-3, -2,0,0,0)$ und $b = (10,6,9)$. Zudem sei für eine gegebene Matrix A die Lösung $x = (4,2,0,0,0)$ zulässig für das primale Problem (P) $\min c^T x \ , s.t. Ax = b \wedge x \geq 0$, und $\pi = (-1, -1,0)$ zulässig für das zugehörige duale Problem (D). Dann ist x eine optimale Lösung für (P) und π ist eine optimale Lösung für (D). (7 Punkte)

These 5: Der Wert des maximalen s-t-Flusses in einem Netzwerk kann kleiner sein, als der Wert des minimalen s-t-Schnitts. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Kürzeste Wege Problem) **[41 Punkte]**

Gegeben ist nun die folgende Adjazenzliste für ein Netzwerk mit 6 Knoten:

Knoten i	Nachfolger j, Kantengewichte $c_{i,j}$; ...
1	2,2 ; 3,5
2	4,5
3	2,1 ; 4,4 ; 5,2
4	5,1 ; 6,2
5	3,1 ; 6,3
6	Keine Nachfolger

a) Zeichnen Sie das Netzwerk mit Knoten, Kanten und Kantengewichten. (4 Punkte)

b) Sei $w = ((1,2),(1,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,5),(4,5),(4,6),(5,3),(5,6))$ ein Vektor, bestehend aus allen Kanten des Graphen. Geben Sie die Knoten-Kantenadjazenzmatrix $\tilde{A}$ an, wobei die i-te Zeile von $\tilde{A}$ zum i-ten Knoten korrespondiert und die j-te Spalte von $\tilde{A}$ zum j-ten Eintrag von w korrespondiert. (5 Punkte)

c) Interpretieren Sie die Kantengewichte als Kosten. Bestimmen Sie den kürzesten Weg von 1 nach 6 durch die Anwendung des Dijkstra-Algorithmus. (7 Punkte)

d) Das kürzeste Wege Problem lässt sich durch

$$\min c^T x\,, s.t. Ax = e^1 \wedge x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ für alle } i = 1, \dots, 10$$

darstellen, wobei A durch Streichen der letzten Zeile der Matrix $\tilde{A}$ entsteht. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der optimalen Lösung der LP-Relaxation dieses Problems (d.h. $x_i \in IR_{\geq 0}, \forall i$) und der optimalen Lösung des ganzzahligen Optimierungsproblems? (6 Punkte)

e) Nach einigen Iterationsschritten des Primal-Dualen Simplexverfahrens zur Findung des kürzesten Weges für das obige Netzwerk haben Sie die folgende duale Lösung $\pi^T = (9,7,6,2,3)$ ermittelt. Ihr Kommilitone Kasimir Küchenkachel bemerkt, dass Sie sich verrechnet haben müssen. Zeigen Sie, dass Herr Küchenkachel Recht hat.

(7 Punkte)

f) Gegeben sei die zulässige primale Lösung $x = (1,0,1,0,0,0,0,1,0,0)$ für das kürzeste Wege Problem. Zeigen Sie durch Ermittlung einer geeigneten dualen Lösung π, dass x eine optimale primale Lösung ist. (7 Punkte)

g) Wählen Sie genau eine bereits existierende Kante aus dem obigen Netzwerk so aus, dass durch Ändern des Kantengewichtes dieser Kante auf einen endlichen Wert der Bellman-Ford-Algorithmus keinen kürzesten Weg findet. Begründen Sie Ihre Wahl.

(5 Punkte)

Aufgabe 3 (Ganzzahlige Optimierung) **[22 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiere } x_1 + 2x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&3x_2 + x_3 = 9 \\
&2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\
&\text{mit } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie eine optimale ganzzahlige Lösung mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory. (8 Punkte)

c) Drücken Sie den ersten in Teilaufgabe b) ermittelten Schnitt unter ausschließlicher Verwendung der Variablen x_1 und x_2 aus. (4 Punkte)