

Name: _____ Vorname: _____ Matrikel-Nr.: _____

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Sommersemester 2019

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	17.07.2019
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der fünf gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **6** Seiten.

Aufgabe 1 (Metaheuristiken)**[18 Punkte]**

Sei das folgende QAP gegeben:

	a	b	c
a	-	2	3
b	3	-	2
c	4	1	-

(Distanzmatrix)

	1	2	3
1	-	2	2
2	4	-	3
3	2	3	-

(Flussmatrix)

Die Nachbarschaft einer Lösung ist die Menge aller Lösungen, die durch Vertauschung zweier Elemente entsteht.

- Ermitteln Sie die Lösung, die nach einer Iteration der Tabu Suche als neue aktuelle Lösung übernommen wird. Begonnen wird mit der Initiallösung $1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c$ und einer leeren Tabuliste. (8 Punkte)
- Nun werden zwei Iterationen der Überprüfung der ersten Nachbarschaft des Verfahrens Simulated Annealing auf obiges Problem angewendet. Dabei wird die nächste Nachbarschaftslösung nicht zufällig gewählt, sondern nach lexikographischer Reihenfolge der Vertauschungen, d.h. es wird nacheinander $(1,2), (1,3), (2,3)$ untersucht. Bestimmen Sie im ersten Iterationsschritt für die Zufallsvariable $X_1 = 0,3$ die maximale ganzzahlige Temperatur t , so dass die neue Lösung *nicht* übernommen wird. Für den zweiten Iterationsschritt (also die Betrachtung der Vertauschung $(1,3)$) ist darüber hinaus eine Zufallsvariable zu ermitteln, die für jede Temperatur $t > 0$ sicherstellt, dass die neue Lösung ebenfalls *nicht* übernommen wird. (10 Punkte)

Aufgabe 2 (Scheduling)**[11 Punkte]**

Gegeben sind die folgenden Daten für ein Ein-Maschinen-Scheduling Problem:

Auftrag i :	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Prozesszeit p_i :	4	7	5	6
Fälligkeit d_i :	4	9	13	16

Wir betrachten nun die Minimierung der Gesamtverspätung:

- Definieren Sie die Zustände $V(S,t)$ im Ansatz der Dynamischen Programmierung von Lawler! (3 Punkte)
- Bestimmen Sie einen optimalen Schedule für das obige Problem mithilfe des Ansatzes von Lawler. . (8 Punkte)

Aufgabe 3 (Weihnachtsfeierplanung)**[27 Punkte]**

In einem Unternehmen mit m Mitarbeitern $1, \dots, m$ wird eine Weihnachtsfeier geplant. Es gibt k viele Tische, zu denen jeweils n Mitarbeiter zugeordnet werden sollen. Der Organisator möchte jedem Mitarbeiter i genau einen Tisch und zusätzlich genau eine Person j an diesem Tisch zuordnen, die vom Mitarbeiter i beschenkt werden soll („lustiges Wichteln“). Zur Verfügung steht eine Liste (siehe nächste Seite), die die Sympathien zwischen den Mitarbeitern dokumentiert. Eine zulässige Lösung definiert somit für jeden Tisch ein Tupel (M, z_M) . Dabei definiert M als n -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, m\}$ die n Mitarbeiter, die an dem jeweiligen Tisch sitzen. Hierfür definiert z_M eine zulässige Beschenkungszuordnung für die Menge M , so dass jeder Mitarbeiter aus M von genau einer Person aus M beschenkt wird und jeder Mitarbeiter aus M genau eine Person beschenkt. Die Menge Z ist die Menge aller zulässigen Tupel dieser Art, wobei jedes Tupel (M, z_M) Zuordnungskosten von $c(M, z_M) = \sum x_{i,j} \cdot c_{i,j}$ besitzt. Dabei ist $x_{i,j} = 1$, falls j von i beschenkt wird und sonst 0. Der Parameter $c_{i,j}$ ist einer gegebenen Sympathiematrix (siehe nächste Seite) zu entnehmen. Die LP-Relaxation dieses Problems lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(M, z_M) \in Z} c(M, z_M) \cdot x_{(M, z_M)} \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{(M, z_M) \in Z \text{ mit } i \in M} x_{(M, z_M)} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{Duale Variable : } \gamma_i) \\
 & x_{(M, z_M)} \geq 0 \quad \forall (M, z_M) \in Z
 \end{aligned}$$

Zu jedem Tupel (M, z_M) gehört die Variable $x_{(M, z_M)}$, die deren Verwendung in einer Lösung angibt.

- Erklären Sie die Bedeutung der Zielfunktion und der Nebenbedingungen des Modells. (6 Punkte)
- Eine Basislösung und eine Menge von n Mitarbeitern seien für einen Tisch gegeben. Sie wollen nun eine Beschenkungszuordnung unter diesen Mitarbeitern finden, die geringste reduzierte Kosten aufweist. Welches aus der Vorlesung bekannte Optimierungsproblem haben Sie hier vorliegen? (7 Punkte)
- Sei nun ein solches Problem mit 6 Mitarbeitern und 2 Tischen mit einer Basislösung und zugehöriger dualer Lösung $(\gamma_1, \dots, \gamma_6) = (\frac{23}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{29}{3})$ gegeben. Überprüfen Sie, ob zulässige Beschenkungszuordnungen z_M für $M = \{1, 4, 5\}$ existieren, die durch Aufnahme solch einer Zuordnung zu einer Verbesserung der aktuellen Basislösung führen könnten. Die Sympathiematrix finden Sie auf der nächsten Seite.

Die Sympathiematrix lautet:

	1	2	3	4	5	6
1	-	6	5	1	3	7
2	7	-	4	4	1	6
3	2	4	-	6	2	3
4	1	2	6	-	3	2
5	3	2	2	3	-	5
6	7	2	3	2	4	-

(14 Punkte)

Aufgabe 4 (symmetrisches TSP)

[19 Punkte]

Gegeben sei die folgende symmetrische Distanzmatrix.

$$\begin{pmatrix} - & 30 & 100 & 10 & - \\ 30 & - & 130 & 20 & - \\ 100 & 130 & - & 80 & 90 \\ 10 & - & 80 & - & 70 \\ 20 & - & 90 & 70 & - \end{pmatrix}.$$

- Zeichnen Sie den durch die Matrix gegebenen Graphen. (3 Punkte)
- Wenden Sie das Verfahren von Prim an, um einen minimalen Spannbaum zu erzeugen und geben Sie den Zielfunktionswert an. (5 Punkte)
- Ermitteln Sie die max-1-tree-Schranke mit $\sum_{i<4} x_{i,4} + \sum_{k>4} x_{4,k} = 2$. (5 Punkte)
- Bestimmen Sie den Zielfunktionswert der aus der Vorlesung bekannten Lagrangere-
laxation für das symmetrische TSP für die Multiplier

$$(g_1 = 40, g_2 = 0, g_3 = 0, g_4 = 0, g_5 = -40)$$

und $\sum_{i<4} x_{i,4} + \sum_{k>4} x_{4,k} = 2$. (6 Punkte)

Aufgabe 5 (Gemüseanbau)**[15 Punkte]**

In ihrem Garten haben Sie ein schmales Feld, das Sie für den Anbau von Gemüse nutzen wollen. Dabei können Sie Gemüsesorten nur der Länge nach anbauen. Die verfügbare Gesamtlänge beträgt 15 Meter. Sie wollen verschiedene Sorten anbauen, denen Sie jeweils einen Nutzen zugewiesen haben. Entscheiden Sie sich für eine Gemüsesorte, so müssen Sie alle zur Verfügung stehenden Samen aufbrauchen, da ansonsten kein Nutzen erzielt wird. Damit wird durch die Wahl einer Gemüsesorte ein in der folgenden Tabelle angegebener Längenbedarf des Feldes verbraucht. Ihr Ziel ist es, den Gesamtnutzen zu maximieren.

Gemüsesorte	Nutzen	Längenbedarf (in Längeneinheiten)
Radieschen	35	7
Rote Bete	80	8
Weißkohl	48	6
Möhren	27	3

- a) Welches in der Vorlesung behandelte Optimierungsproblem wird hier beschrieben? Erläutern Sie dazu auch die Analogien zwischen den verschiedenen Parametern aus dem Beispiel und der Vorlesung. (5 Punkte)
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Branch and Bound Verfahrens, das in jedem Knoten als obere Schranke die LP-Relaxation ermittelt und über das kritische Gut verzweigt eine optimale Lösung. Nutzen Sie die Bestensuche (Best-first search) für die Auswahl des nächsten Knotens. Ein Knoten gilt als abgeschlossen, sobald die Restkapazität der zugehörigen Teillösung keine zusätzliche Aufnahme von Gemüsesorten erlaubt, die noch nicht verplant oder noch nicht ausgeschlossen sind. (10 Punkte)

Formeln:

$$\begin{aligned}
 J(j, l, k) &= \{i \mid j \leq i \leq l \wedge p_i < p_k\} \\
 V(\emptyset, t) &= 0 \text{ and } V(\{j\}, t) = \max\{0, t + p_j - d_j\} \\
 V(J(j, l, k), t) &= \min_{\delta} \left(\begin{aligned} &V(J(j, k' + \delta, k'), t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k')} p_j - d_{k'}\right) \\ &+ V\left(J(k' + \delta + 1, l, k'), t + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k)} p_j\right) \end{aligned} \right), \\
 \text{with } k' \in J(j, l, k) &\text{ such that } p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j, l, k)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 LB &= \left| J\left(\frac{1}{2}, 1\right) \right| + \left| \frac{1}{2} \cdot \left| J\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right| \right| \\
 LB &= \left| \left| J\left(\frac{2}{3}, 1\right) \right| + \frac{2}{3} \cdot \left| J\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| J\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right| + \frac{1}{3} \cdot \left| J\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \right| \right| \\
 n_{j1} &:= LB_1(F_j^*) \\
 n_{j2} &:= \begin{cases} LB_2(F_j^*) & \text{if } p_j \geq 1/2 \text{ or } LB_2(F_j^*) \notin \mathbb{N} \\ LB_2(F_j^*) - 1/2 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 n_{j3} &:= \begin{cases} LB_3(F_j^*) & \text{if } p_j \geq 2/3 \\ LB_3(F_j^*) - 1/3 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 E_j &:= \left\lfloor \frac{t_j + \sum_{h \in P_j} t_h}{C} \right\rfloor \quad \text{for } j = 1, \dots, N \\
 L_j(M) &:= M + 1 - \left\lfloor \frac{t_j + \sum_{h \in F_j} t_h}{C} \right\rfloor \quad \text{for } j = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

$$UBMT = \max \left\{ \left\lfloor p + (C - w) \cdot \frac{p_{b^{*+1}}}{w_{b^{*+1}}} \right\rfloor, \left\lfloor p + p_{b^*} + (C - w - w_{b^*}) \cdot \frac{p_{b^{*-1}}}{w_{b^{*-1}}} \right\rfloor \right\}$$

$$\forall i < i^* < j: U^+(i, j) = \min\{V^+(i, j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i, j-1) + x_j - x_i\}$$

$$\forall i < i^* < j: U^-(i, j) = \min\{V^-(i+1, j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1, j) + x_j - x_i\}$$

$$\Delta := f(S) - f(S_0)$$

$$\text{If } x < e^{-\frac{\Delta}{t}}, \text{ then } S_0 = S$$