Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Sommersemester 2020

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	10.08.2020
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der fünf gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **6** Seiten.

Aufgabe 1 (Simulated Annealing) **[6 Punkte]**

Beschreiben Sie die Metaheuristik Simulated Annealing. Wie können bei dieser Art von Verfahren Intensivierung und Diversifikation realisiert werden? (6 Punkte)

Aufgabe 2 (Ein Unternehmen und die Layoutplanung) **[35 Punkte]**

Ein Unternehmen möchte in seiner Produktionshalle vier Maschinen aufstellen. Dafür stehen 4 vorgegebene Plätze zur Verfügung, wobei jeder Platz höchstens eine Maschine aufnehmen kann. Für die Zuordnung der Maschine i zum Platz j entstehen Kosten von $c_{i,j}$.

a) Geben Sie für dieses Problem mit dem Ziel einer kostenminimalen Zuordnung, das Ihnen aus der Vorlesung bekannte mathematische Modell an. Nutzen Sie hierzu die Binärvariablen $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls Maschine } i \text{ Ort } j \text{ zugeordnet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Zudem dürfen Sie mathematische Quantoren verwenden. (4 Punkte)

b) Sie haben von dem Unternehmen eine Kostenmatrix erhalten und haben daraufhin handschriftlich mithilfe der ungarischen Methode eine optimale Lösung ermittelt. Nun haben Sie Ihren Kaffee umgestoßen und können nur noch Teile Ihres Lösungswegs entziffern. Unter anderem liegt Ihnen eine optimale zulässige duale Lösung $\pi^T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (0,0,4,3,2,2,3,0)$ und ein Teil der Kostenmatrix C

	Ort 1	Ort 2	Ort 3	Ort 4
Maschine 1	2	2	5	8
Maschine 2	7	2	3	3
Maschine 3	8	6	10	?
Maschine 4	6	10	?	4

vor. Dabei korrespondiert die duale Variable α_i zur primalen Restriktion *Ort i nimmt genau eine Maschine auf* und die duale Variable β_j korrespondiert zur primalen Restriktion *Maschine j wird genau einem Ort zugewiesen*. Bestimmen Sie mit diesen Informationen $c_{3,4}$ und $c_{4,3}$ sowie eine optimale Lösung und begründen Sie, warum diese tatsächlich optimal ist. (10 Punkte)

c) Das Unternehmen stellt nun fest, dass die Kosten für die Zuordnung einer Maschine zum Ort 2 um 7 Einheiten steigen, unabhängig von der Wahl der zugeordneten Maschine. Können Sie, ohne von vorne beginnen zu müssen, eine optimale Lösung liefern? Geben Sie den neuen Zielfunktionswert an. (4 Punkte)

d) Nach der Zuordnung der Maschinen muss nun ein Gutachter überprüfen, ob auch alles sachgerecht installiert wurde. Um ihn positiv zu stimmen will das Unternehmen die Wegstrecke für ihn minimieren. Der Gutachter überprüft dabei alle Maschinen. Der Rundgang startet beim Büro der Unternehmensleitung. Die symmetrische Distanzmatrix hierzu lautet

	Ort 1	Ort 2	Ort 3	Ort 4	Büro
Ort 1	-	360	300	120	600
Ort 2	360	-	410	200	520
Ort 3	300	410	-	310	320
Ort 4	120	200	310	-	530
Büro	600	520	320	530	-

Bestimmen Sie hierzu eine 1-tree Schranke mit ausgezeichnetem Knoten $s = 5$ (Büro).

(6 Punkte)

e) Wie würde das Branch&Bound-Verfahren für das symmetrische TSP fortfahren, falls der in Teilaufgabe d) ermittelte 1-tree für die Schranke des Wurzelknotens herangezogen werden würde? (3 Punkte)

f) Nach dem Anlauf der Produktion wird festgestellt, dass nicht vernachlässigbare Kosten durch den Transport von Einheiten zwischen den Maschinen entstehen. Es wird nun über eine Umordnung der Maschinen nachgedacht, wobei aber Maschine 1 nicht mehr umgeordnet wird (Maschine 1↦Ort 1). Hierbei wird die Müller-Merbach-Heuristik herangezogen mit der Zuordnungsreihenfolge $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ und $r_3 = 4$ und der Flussmatrix

	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3	Maschine 4
Maschine 1	-	0	0	60
Maschine 2	10	-	0	0
Maschine 3	0	20	-	0
Maschine 4	0	0	0	-

In der zweiten Iteration erhält man die Teilzuordnung Maschine 2 ↦ Ort 4, sowie Maschine 3 ↦ Ort 2. (Maschine 1 ist immer fest Ort 1 zugeordnet) mit $z = 5200$. Führen Sie die letzte Iteration der Müller-Merbach-Heuristik durch und geben Sie die entstandene Lösung und den Zielfunktionswert an. (8 Punkte)

Aufgabe 3 (Scheduling) **[24 Punkte]**

Wir betrachten das Ein-Maschinen-Scheduling Problem mit dem Ziel der Minimierung der Gesamtverspätung. Gegeben sind dazu die folgenden Daten:

Auftrag	1	2	3	4	5
Prozesszeit p	5	10	22	25	20
Fälligkeit d	10	20	30	40	50

a) Bestimmen Sie die Gesamtverspätung des semi-aktiven Schedules $s = (1,2,3,4,5)$.
(3 Punkte)

b) Definieren Sie die Zustände V(S,t) im Ansatz der Dynamischen Programmierung von Lawler. (3 Punkte)

c) Welche Vorrangbeziehungen zwischen den Aufträgen können Sie zur Minimierung der Gesamtverspätung ableiten? (3 Punkte)

d) Ermitteln Sie mithilfe des Ansatzes von Lawler einen optimalen Schedule und geben Sie seinen Zielfunktionswert an. (9 Punkte)

e) Wählen Sie Prozesszeiten p_i und Fälligkeitsdaten d_i für ein Problem mit 4 Aufträgen, sodass die Anzahl der zu untersuchenden Zustände V(S,t) maximal wird. (6 Punkte)

Aufgabe 4 (Umzug) **[12 Punkte]**

Für Ihren neuen Job ziehen Sie in eine andere Stadt. Da Sie nun unter Zeitdruck stehen, können Sie zunächst nur eine Umzugskiste mitnehmen. Nun überlegen Sie sich, wie Sie sie füllen, da der Inhalt ein Gewicht von 20 kg nicht überschreiten darf. Sie haben sich für eine Auswahl aus den folgenden Gegenständen entschieden und weisen ihnen jeweils einen Nutzen zu:

Gegenstand	Soundanlage	Büchersammlung	Laptop	Wasserkocher
Nutzen	12	7	2	2
Gewicht (in kg)	15	7	6	3

a) Sie wollen Ihren Nutzen maximieren. Welches in der Vorlesung behandelte Optimierungsproblem wird hier beschrieben? Stellen Sie das zugehörige mathematische Modell auf. (4 Punkte)

b) Ermitteln Sie mithilfe der Dynamischen Programmierung eine optimale Lösung.
(8 Punkte)

Aufgabe 5 (Salome) **[13 Punkte]**

Gegeben sei ein SALBP-1 Problem mit einer Taktzeit von $C = 10$ und den folgenden Daten:

Auftrag	1	2	3	4	5	6
Prozesszeit	7	3	8	5	6	1

a) Beschreiben Sie kurz die LB_7. Gehen Sie darauf ein, welches Optimierungsproblem zugrunde liegt. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie die LB_1. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die LB_7. (6 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k\}$$

$$V(\emptyset,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k')}p_j-d_{k'}\right)\\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k)}p_j\right)\end{array}\right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'}=\max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left|\,J\left(\frac{1}{2},1\right]\,\right|+\left\lceil\frac{1}{2}\cdot\left|\,J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\,\right|\right\rceil$$

$$LB=\left\lceil\,\left|\,J\left(\frac{2}{3},1\right]\,\right|+\frac{2}{3}\cdot\left|\,J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\,\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|\,J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\,\right|+\frac{1}{3}\cdot\left|\,J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\,\right|\,\right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M)=\max\left\{\sum_{i=0}^{k}t_{k\cdot M+1-i}:\mathrm{k}\in\left\{1,\ldots,\left\lfloor\frac{N-1}{M}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$LB=\min\{M:C(M)\le C\}$$

$$E_j:=\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in P_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$L_j(M):=M+1-\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in F_j^*}t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\ldots,N$$

$$\text{if } x<e^{\frac{-\Delta}{t}},\text{then } S_0=S$$

$$UBMT=\max\left\{\left\lfloor p+(C-w)\cdot\frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}}\right\rfloor,\left\lfloor p+p_{b^*}+\left(C-w-w_{b^*}\right)\cdot\frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}}\right\rfloor\right\}$$

$$\forall i<i^*<j:U^+(i,j)=\min\left\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1},V^-(i,j-1)+x_j-x_i\right\}$$

$$\forall i<i^*<j:U^-(i,j)=\min\left\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i,V^+(i+1,j)+x_j-x_i\right\}$$