

Name: _____ Vorname: _____ Matrikel-Nr.: _____

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2018/2019

| | |
|-----------------------|--|
| Prüfungsgebiet: | MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management |
| Tag der Prüfung: | 29.03.2019 |
| Name des Prüfers: | Prof. Dr. Bock |
| Erlaubte Hilfsmittel: | Taschenrechner (nicht programmierbar) |

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Aufgabe 1 (Metaheuristiken)**[5 Punkte]**

Erläutern Sie kurz den Begriff der „Diversifikation“. Vergleichen Sie bezüglich dieser Eigenschaft kurz die Heuristiken „Tabu Search“ und „Simulated Annealing“.

Aufgabe 2 (Scheduling)**[17 Punkte]**

Gegeben sind die folgenden Daten für ein Ein-Maschinen-Scheduling Problem:

| | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| Auftrag i : | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ |
| Prozesszeit p_i : | 3 | 5 | x | 6 |
| Fälligkeit d_i : | 4 | 8 | 13 | 24 |

Wir betrachten nun die Minimierung der Gesamtverspätung:

- Definieren Sie die Zustände $V(S,t)$ im Ansatz der Dynamischen Programmierung von Lawler! (3 Punkte)
- Bestimmen Sie den Zielfunktionswert des Schedules (2,1,3,4) in Abhängigkeit des Parameters x . (4 Punkte)
- Ermitteln Sie alle möglichen Werte für $x \geq 5$ als Prozesszeit von Auftrag 3 so, dass der Schedule (1,2,3,4) optimal ist. (10 Punkte)

Aufgabe 3 (Traveling Salesman Problem (TSP))**[38 Punkte]**

Sie sind an der Universität Wuppertal und haben einige Dinge zu erledigen. Sie starten um 8 Uhr bei der Bibliothek. In der nachfolgenden Tabelle sind die relevanten Orte sowie einige Termine und Öffnungszeiten aufgelistet. Außerdem ist der Zeitanspruch der Anliegen der Tabelle zu entnehmen. Sie wollen die Wegstrecke minimieren.

| Knoten | Orte | Öffnungszeiten/Termine | Dauer |
|--------|-------------------------|------------------------|--------|
| 1 | Bibliothek | 8:00-21:45 | 60 min |
| 2 | Postkasten | | |
| 3 | Mensa | 11:30-14:30 | 35 min |
| 4 | Studierendensekretariat | 9:00-12:00 | |
| 5 | Lerngruppenraum | | |
| 6 | Vorlesung | 10:15 | |

- Betrachtet wird der Ansatz von Dumas et. al. Definieren Sie den Zustand $F(S, j, t)$. (5 Punkte)
- Argumentieren Sie mit Hilfe eines Post Feasibility Tests, warum der Zustand $F(\{1,2\}, 2, t)$ nicht um Knoten 3 erweitert werden kann. (5 Punkte)

- c) Nehmen Sie an, dass nun keine zeitlichen Beschränkungen vorhanden sind. Außerdem sei die folgende Abstandsmatrix gegeben.

$$\begin{pmatrix} - & 20 & 100 & 10 & 5 & 50 \\ 20 & - & 110 & 10 & 30 & 60 \\ 100 & 110 & - & 90 & 80 & 60 \\ 10 & 10 & 90 & - & 30 & 40 \\ 5 & 30 & 80 & 30 & - & 20 \\ 50 & 60 & 60 & 40 & 20 & - \end{pmatrix}$$

- i. Es wird nun das Branch and Bound Verfahren von Little et. al. angewendet. Bestimmen Sie zunächst die untere Schranke des Wurzelknotens. Lässt sich hieraus auch direkt eine optimale Lösung des zugehörigen linearen Zuordnungsproblems (LAP) ermitteln? (8 Punkte)
- ii. Ermitteln Sie eine erste Branchingvariable. (7 Punkte)
- iii. Begründen Sie, warum der Zielfunktionswert einer optimalen Lösung des linearen Zuordnungsproblems (LAP) eine untere Schranke für das TSP ist. (5 Punkte)

- d) Die letzten beiden Knoten sind nun nicht mehr von Interesse. Sie erhalten also die Abstandsmatrix

$$\begin{pmatrix} - & 20 & 100 & 10 \\ 20 & - & 110 & 10 \\ 100 & 110 & - & 90 \\ 10 & 10 & 90 & - \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den optimalen Zielfunktionswert der Lagrange-Relaxation bezüglich der Multiplier $g_1 = g_2 = 10, g_3 = g_4 = 0$ und des ausgezeichneten Knotens $s=3$.

(8 Punkte)

Aufgabe 4 (Gebäudeerrichtung)**[30 Punkte]**

In Venedig soll ein Gebäude errichtet werden. Dies erfolgt über Module, die übereinander gebaut werden können. Die Stadtverwaltung gibt für das zu bebauende Grundstück ein Maximalgewicht von 300 Tonnen vor. Die folgenden Module stehen zur Verfügung:

| Modul | M1 | M2 | M3 | M4 |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|
| Höhe (in cm) | 220 | 300 | 280 | 310 |
| Gewicht (in Tonnen) | 100 | 160 | 150 | 170 |

- a) Das Gebäude soll möglichst hoch sein. Aus ästhetischen Gründen soll jedes Modul aber maximal einmal benutzt werden, die Reihenfolge spielt hierbei aber keine Rolle. Zu welchem aus der Vorlesung bekannten Optimierungsproblem ist dieses Problem äquivalent? Definieren Sie das gegebene Problem als mathematische Optimierungsaufgabe mit allen Variablen, Nebenbedingungen und der Zielfunktion. (6 Punkte)
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dynamischen Programmierung eine optimale Lösung für dieses Problem. (8 Punkte)
- c) Die Stadt möchte Wohnraum schaffen und wird dazu einige Gebäude bauen lassen. Es sind die folgenden Mengen von Modulen verfügbar:

| Modul | M1 | M2 | M3 | M4 |
|--------|----|----|----|----|
| Anzahl | 10 | 5 | 8 | 4 |

Dabei dürfen nun auch Module mehrfach pro Gebäude genutzt werden. Da die Module sehr teuer in der Beschaffung waren, müssen sie alle verbaut werden. Das Ziel ist alle diese Module zu verarbeiten und möglichst wenig Grundstücke dafür zu nutzen. Es gilt weiterhin die Beschränkung von 300 Tonnen pro Grundstück. Betrachtet wird nun die LP-Relaxation dieses Problems. Hierbei wurde eine zulässige Basislösung gefunden mit

$$\text{dualer Lösung } (y_{M1}, y_{M2}, y_{M3}, y_{M4}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right).$$

- i. Formulieren Sie ein mathematisches Optimierungsproblem, das einen Bauplan für ein Gebäude ermittelt, der die bisherige Lösung verbessert, falls ein solcher Bauplan existiert. (6 Punkte)
- ii. Begründen Sie (ohne das Problem aus i. optimal zu lösen), warum die LP-Relaxation bereits optimal gelöst wurde. (7 Punkte)
- iii. Die relevanten Baupläne der optimalen Lösung der LP-Relaxation sind

$$a_1 = (1 \ 1 \ 0 \ 0), \quad a_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 1), \quad a_3 = (0 \ 0 \ 2 \ 0), \quad a_4 = (3 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Die Lösung lautet $(5 \ 4 \ 4 \ \frac{1}{3})$. Geben Sie eine optimale Lösung des Originalproblems an, das lediglich ganzzahlige Lösungen erlaubt. (3 Punkte)

Formeln:

$$\begin{aligned}
 J(j,l,k) &= \{i \mid j \leq i \leq l \wedge p_i < p_k\} \\
 V(\emptyset, t) &= 0 \text{ and } V(\{j\}, t) = \max\{0, t + p_j - d_j\} \\
 V(J(j,l,k), t) &= \min_{\delta} \left(\begin{aligned} &V(J(j, k' + \delta, k'), t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k')} p_j - d_{k'}\right) \\ &+ V\left(J(k' + \delta + 1, l, k'), t + \sum_{j \in J(j, k' + \delta, k)} p_j\right) \end{aligned} \right), \\
 \text{with } k' \in J(j,l,k) & \text{ is such that } p_{k'} = \max\{p_i \mid i \in J(j,l,k)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 LB &= \left| J\left(\frac{1}{2}, 1\right) \right| + \left| \frac{1}{2} \cdot J\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right| \\
 LB &= \left| J\left(\frac{2}{3}, 1\right) \right| + \frac{2}{3} \cdot \left| J\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| J\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right| + \frac{1}{3} \cdot \left| J\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \right| \\
 n_{j1} &:= LB_1(F_j^*) \\
 n_{j2} &:= \begin{cases} LB_2(F_j^*) & \text{if } p_j \geq 1/2 \text{ or } LB_2(F_j^*) \notin \mathbb{N} \\ LB_2(F_j^*) - 1/2 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 n_{j3} &:= \begin{cases} LB_3(F_j^*) & \text{if } p_j \geq 2/3 \\ LB_3(F_j^*) - 1/3 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 E_j &:= \left\lfloor \frac{t_j + \sum_{h \in P_j} t_h}{C} \right\rfloor \quad \text{for } j = 1, \dots, N \\
 L_j(M) &:= M + 1 - \left\lfloor \frac{t_j + \sum_{h \in F_j} t_h}{C} \right\rfloor \quad \text{for } j = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

$$UBMT = \max \left\{ \left\lfloor p + (C - w) \cdot \frac{p_{b^{*+1}}}{w_{b^{*+1}}} \right\rfloor, \left\lfloor p + p_{b^*} + (C - w - w_{b^*}) \cdot \frac{p_{b^{*-1}}}{w_{b^{*-1}}} \right\rfloor \right\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i, j) = \min\{V^+(i, j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i, j-1) + x_j - x_i\}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i, j) = \min\{V^-(i+1, j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1, j) + x_j - x_i\}$$