Name: ________________________ Vorname: ______________________ Matrikel-Nr.:____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2019/2020

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	17.06.2020
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Aufgabe 1 (Scheduling) **[17 Punkte]**

Gegeben sei ein Ein-Maschinen-Scheduling Problem mit 4 Aufträgen.

Wir betrachten die Minimierung der Gesamtverspätung und erhalten nach Anwenden des Ansatz der Dynamischen Programmierung von Lawler einen optimalen Zielfunktionswert von

$$V(\{1,2,3,4\},0) = \min\begin{Bmatrix} V(\{1,2\},0) + 2 + V(\{4\},11)\,, \\ V(\{1,2,4\},0) + 6 + V(\emptyset,15) \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 0+2+3, \\ 0+6+0 \end{Bmatrix}.$$

a) Definieren Sie die Zustände V(S,t) im Ansatz von Lawler! (3 Punkte)

b) Welcher Auftrag hat die größte Prozesszeit? (3 Punkte)

c) Werden Auftrag 1 und Auftrag 2 als erstes bearbeitet, so hat die Reihenfolge der beiden Aufträge keinen Einfluss auf den Zielfunktionswert. Ermitteln Sie einen optimalen Schedule. (3 Punkte)

d) Ermitteln Sie die Fälligkeit d_3 von Auftrag 3, die Prozesszeit p_4 von Auftrag 4 und die Fälligkeit d_4 von Auftrag 4. (8 Punkte)

Aufgabe 2 (Traveling Salesman Problem (TSP) und LAP) **[28 Punkte]**

a) Berechnen Sie eine optimale Lösung für das durch die folgende Matrix gegebene LAP mit Hilfe der Ungarischen Methode und geben Sie den errechneten Zielfunktionswert an:

$$\begin{pmatrix} - & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & - & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & - & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & - & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & - \end{pmatrix}$$

(10 Punkte)

b) Beschreiben Sie die untere Schranke, die beim Branch & Bound Verfahren von Little et al. in jedem Knoten herangezogen wird. Welche Vor- und Nachteile entstehen, wenn diese Schranke durch einen optimalen Zielfunktionswert des entsprechenden LAPs ersetzt wird? (6 Punkte)

c) Ermitteln Sie alle möglichen Variablen, die als erste Branching-Variable gemäß des Branch & Bound Verfahrens von Little et al. in Frage kommen. (6 Punkte)

d) Zeigen oder widerlegen Sie: *Gegeben sei eine quadratische Kostenmatrix. Hat man hierfür eine LAP-Lösung ermittelt, deren Zielfunktionswert nicht kleiner ist als der Zielfunktionswert einer optimalen TSP-Lösung zu dieser Matrix, so ist die LAP-Lösung eine zulässige TSP-Lösung.* (6 Punkte)

Aufgabe 3 (Knapsack Problem) **[33 Punkte]**

Betrachtet wird das Knapsack Problem, bei dem man jeden gegebenen Gegenstand maximal einmal verwenden darf. Dabei seien n Gegenstände mit Gewichten w_j für Gegenstand j Nutzen p_j für Gegenstand j und Kapazität C gegeben.

a) Erstellen Sie das zugehörige ganzzahlige lineare Programm. (4 Punkte)

b) Erstellen Sie die Lagrange-Relaxation mit Multiplier π und fassen Sie die Kapazitätsbeschränkung als schwierige Restriktion auf. (4 Punkte)

c) Die kleinste obere Schranke mit Hilfe der Lagrange-Relaxation erhalten Sie für den Multiplier $\pi_k = \frac{p_k}{w_k}$, wobei k das kritische Gut ist. Zeigen Sie, dass der optimale Zielfunktionswert der Lagrange-Relaxation bezüglich π_k dem optimalen Zielfunktionswert der LP-Relaxation entspricht. (10 Punkte)

d) Gegeben seien nun vier Gegenstände mit $C = 40$ und

Gegenstand j	1	2	3	4
Nutzen p_j	6	10	3	3
Gewicht w_j	18	20	15	12

i. Bestimmen Sie eine optimale Lösung der Lagrange-Relaxation bezüglich des Multipliers $\pi_k = \frac{p_k}{w_k}$, wobei k das kritische Gut ist. Geben Sie zudem den erzielten Zielfunktionswert an. (6 Punkte)

ii. Finden Sie mit Hilfe des Branch & Bound-Verfahrens, bei dem über das kritische Gut verzweigt wird, jeder Knoten als obere Schranke den Wert der LP-Relaxation annimmt und als Auswahlverfahren die Bestensuche angewendet wird eine optimale Lösung. (9 Punkte)

Aufgabe 4 (Jobmesse) **[12 Punkte]**

Auf einer Jobmesse will der Veranstalter die Tischplatten aller vorhandenen Tische mit einer Folie versehen. Die Länge der Tischfolienrollen entspricht genau der Länge der Tische. Mit einer Tischfolienrolle kann man 400 cm bekleben. Es gibt 4 verschiedene Typen von Tischen.

Typ	1	2	3	4
Breite (in cm)	210	200	120	110
Anzahl	70	90	135	150

Ein Tisch darf nicht mit mehr als einem Stück Folie beklebt werden. Der Veranstalter möchte die Anzahl der verwendetet Tischfolienrollen minimieren.

a) Zu welchem aus der Vorlesung bekannten Optimierungsproblem ist dieses Problem äquivalent? Erläutern Sie dazu auch die Analogie zwischen den verschiedenen Parametern des gegebenen Problems und der Vorlesung. (6 Punkte)

b) Gegeben sei nun die duale Lösung $y^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Sollte das Schnittmuster (1,0,1,0) ausgehend von dieser Lösung berücksichtigt werden? Begründen Sie dies. (6 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k\}$$

$$V(\varnothing,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k')} p_j-d_{k'}\right) \\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right)\end{array}\right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'}=\max\{p_i \mid i\in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left|J\left(\frac{1}{2},1\right]\right|+\left\lceil\frac{1}{2}\cdot\left|J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right|\right\rceil$$

$$LB=\left\lceil\left|J\left(\frac{2}{3},1\right]\right|+\frac{2}{3}\cdot\left|J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right|+\frac{1}{3}\cdot\left|J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\right|\right\rceil$$

$$n_{j1}:=LB_1\left(F_j^*\right)$$

$$n_{j2}:=\begin{cases} LB_2\left(F_j^*\right) & \text{if } p_j \ge 1/2 \text{ or } LB_2\left(F_j^*\right)\notin IN \\ LB_2\left(F_j^*\right)-1/2 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$n_{j3}:=\begin{cases} LB_3\left(F_j^*\right) & \text{if } p_j \ge 2/3 \\ LB_3\left(F_j^*\right)-1/3 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$E_j:=\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in P_j^*} t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\dots,N$$

$$L_j(M):=M+1-\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in F_j^*} t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \text{for } j=1,\dots,N$$

$$UBMT=\max\left\{\left\lfloor p+(C-w)\cdot\frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}}\right\rfloor,\left\lfloor p+p_{b^*}+(C-w-w_{b^*})\cdot\frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}}\right\rfloor\right\}$$

$$\forall i<i^*<j: U^+(i,j)=\min\left\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1},V^-(i,j-1)+x_j-x_i\right\}$$

$$\forall i<i^*<j: U^-(i,j)=\min\left\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i,V^+(i+1,j)+x_j-x_i\right\}$$