Platz-Nr.: _______

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2021/2022

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	28.03.2022
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der fünf gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Simulated Annealing) **[7 Punkte]**

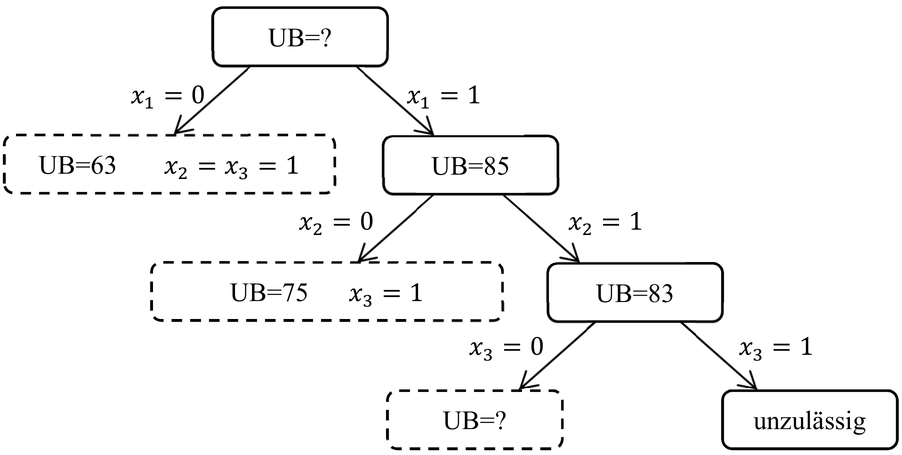
Beschreiben Sie das Verfahren Simulated Annealing. Wie können Intensivierung und Diversifikation in diesem Verfahren realisiert werden?

Aufgabe 2 (Branch&Bound) **[14 Punkte]**

Seien die folgenden Parameter für ein Knapsack-Problem mit 3 Gegenständen und der Kapazität $\boldsymbol{C = 10}$ gegeben:

Gegenstand i	1	2	3
Preis p_i	?	?	33
Gewicht w_i>0	?	?	3

Dieses Problem wurde mithilfe eines Branch&Bound-Verfahrens gelöst, welches über das kritische Gut verzweigt und die LP-Relaxierung (ohne zu runden) als obere Schranke heranzieht. Hierbei ist der folgende Baum entstanden:



Hierbei repräsentieren die Knoten mit gestricheltem Rahmen eine fertige Lösung.

a) Bestimmen Sie alle unbekannten Parameter des Problems. (10 Punkte)

b) Ermitteln Sie die fehlenden oberen Schranken des Baums. Falls Sie in Teilaufgabe a) keine Lösung finden konnten, so ermitteln Sie das kritische Gut für den Wurzelknoten und die zugehörige obere Schranke für die folgenden Parameter (beachten Sie, dass diese Werte nicht den unter a) ermittelten Ergebnissen entsprechen müssen):
$p_1 = 35, w_1 = 5, p_2 = 42, w_2 = 7, p_3 = 33, w_3 = 3$ (4 Punkte)

Aufgabe 3 (Personalgewinnung) [25 Punkte]

Ein Unternehmen will sich erweitern und benötigt dazu neues Personal. Hierbei gingen die folgenden Zahlen an (näher zu betrachtenden) Bewerbungen ein:

Abteilung	IT	Buchhaltung	Marketing	Produktion
Anzahl Bewerber (für die jeweils ein Bewerbungsgespräch anzusetzen ist)	8	4	6	10

Hierbei ist anzumerken, dass nicht mehrere Bewerbungsgespräche (Abk.: Bg) gleichzeitig geführt werden können. Die Länge eines Bewerbungsgesprächs variiert je nach Abteilung. Diese finden Sie in der folgenden Tabelle:

Abteilung	IT	Buchhaltung	Marketing	Produktion
Länge je Bg (in Minuten)	90	60	70	80

Pro Werktag stehen 200 Minuten für Bewerbungsgespräche zur Verfügung. Die Anzahl dieser Werktage soll minimiert werden.

a) Um welches aus der Vorlesung behandelte Optimierungsproblem handelt es sich? Gehen Sie auf die Zielfunktion und Nebenbedingungen ein. (5 Punkte)

b) Es liegt nun die folgende Basislösung für die LP-Relaxierung des Problems vor:
An zwei Tagen werden jeweils **2** Bge bzgl. **Buchhaltung** und **1** Bge bezüglich **Produktion** geführt.
An vier Tagen werden jeweils **2** Bge bzgl. **IT** geführt.
An drei Tagen werden jeweils **2** Bge bzgl. **Marketing** geführt.
An vier Tagen werden jeweils **2** Bge bzgl. **Produktion** geführt.
Welche Kombination von Bewerbungsgesprächen für einen Tag führt zu negativen reduzierten Kosten für diese Basislösung? (10 Punkte)

c) Der Abteilungsleiter der Personalgewinnung möchte, dass die Bewerbungsgespräche innerhalb von 11 Tagen erledigt sind. Begründen Sie mithilfe der LB_7, warum dies nicht möglich ist. (10 Punkte)

Aufgabe 4 (Dynamische Programmierung) **[22 Punkte]**

Sei die folgende Instanz für das Line-TSP mit Deadlines und einer Fahrzeuggeschwindigkeit von $v = 1$ (bei symmetrischen Fahrzeiten) gegeben:

Kunde i	1	2	3	4	5	6
Position x_i	0	12	16	24	32	40
Deadline d_i	110	35	3	10	63	86

Startort der Tour ist Kunde 3.

a) Definieren Sie die Zustände $V^+(i,j)$ und $V^-(i,j)$. (5 Punkte)

b) Ermitteln Sie den Zustand $V^+(2,5)$ mithilfe der dynamischen Programmierung. (7 Punkte)

c) Die Kunden 1 und 6 sind nun irrelevant. Außerdem werden die Positionen nun als Prozesszeiten aufgefasst. Finden Sie einen optimalen Schedule mithilfe der dynamischen Programmierung, der die Gesamtverspätung minimiert. (10 Punkte)

Aufgabe 5 (Symmetrisches TSP) **[22 Punkte]**

Seien die folgenden Kantenkosten für das symmetrische TSP gegeben:

$$\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & \infty & 5 & 8 \\ & \infty & 100 & 3 & 9 & \infty \\ & & \infty & 4 & \infty & \infty \\ & & & \infty & 2 & 11 \\ & & & & \infty & 7 \\ & & & & & \infty \end{pmatrix}$$

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie eine optimale Lösung der Lagrange-Relaxation für den ausgezeichneten Knoten $s = 5$ und die Multiplier $g_1 = 4, g_2 = 6$ und alle übrigen Multiplier $g_i = 0$ mit $i \in \{3,4,5,6\}$. (8 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die duale Lösung (v, w) mit $v = (5,5,6,2,4,7)$ und $w = (1,1,2,-2,0,3)$ optimal für das LAP unter Verwendung der obigen Kostenmatrix ist. (10 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k)=\{i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k\}$$

$$V(\varnothing,t)=0 \text{ and } V(\{j\},t)=\max\{0,t+p_j-d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t)=\min_{\delta}\begin{pmatrix} V(J(j,k'+\delta,k'),t)+\max\left(0,t+p_{k'}+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k')} p_j-d_{k'}\right) \\ +V\left(J(k'+\delta+1,l,k'),t+\sum_{j\in J(j,k'+\delta,k)} p_j\right)\end{pmatrix},$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'}=\max\{p_i \mid i\in J(j,l,k)\}$

$$LB=\left|\ J\left(\frac{1}{2},1\right]\ \right|+\left\lceil\frac{1}{2}\cdot\left|\ J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\ \right|\right\rceil$$

$$LB=\left\lceil\ \left|\ J\ \left(\frac{2}{3},1\right]\right|\ +\ \frac{2}{3}\cdot\left|\ J\ \left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\right|\ +\ \frac{1}{2}\cdot\left|\ J\ \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right|\ +\ \frac{1}{3}\cdot\left|\ J\ \left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\right|\ \right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M)=\max\left\{\sum_{i=0}^{k} t_{k\cdot M+1-i} : \mathrm{k}\in\left\{1,\ldots,\left\lfloor\frac{N-1}{M}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$LB=\min\{M : C(M)\le C\}$$

$$E_j := \left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in P_j^*} t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \textit{for } j=1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M+1-\left\lceil\frac{\left(t_j+\sum_{h\in F_j^*} t_h\right)}{C}\right\rceil \qquad \textit{for } j=1,\ldots,N$$

$$BEFORE(j)=\{k\in N \mid EAT(j,k)>b_k\}$$

$$FIRST(S,i)+s_i>\min_{j\notin S} LDT(i,j)$$

$$UBMT=\max\left\{\left\lfloor p+(C-w)\cdot\frac{p_{b^*+1}}{w_{b^*+1}}\right\rfloor,\left\lfloor p+p_{b^*}+\left(C-w-w_{b^*}\right)\cdot\frac{p_{b^*-1}}{w_{b^*-1}}\right\rfloor\right\}$$

$$\forall i<i^*<j : U^+(i,j)=\min\left\{V^+(i,j-1)+x_j-x_{j-1},V^-(i,j-1)+x_j-x_i\right\}$$

$$\forall i<i^*<j : U^-(i,j)=\min\left\{V^-(i+1,j)+x_{i+1}-x_i,V^+(i+1,j)+x_j-x_i\right\}$$