Name: ______________________ Vorname: ____________________ Matrikel-Nr.:___________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Sommersemester 2018

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	20.09.2018
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen drei Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (Thesen) **[30 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Sei eine optimale und zulässige Basislösung eines linearen Programms gegeben. Existiert für diese Lösung eine Nichtbasisvariable mit reduzierten Kosten gleich 0, so gibt es mehr als eine optimale Basislösung. (5 Punkte)

These 2: Die Summe zweier total unimodularer Matrizen ist total unimodular. (5 Punkte)

These 3: Sei ein Transportproblem mit 3 Anbietern mit Angebot $a_1 = 9$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ und 3 Kunden mit Nachfrage $b_1 = 3$, $b_2 = 7$, $b_3 = 6$ gegeben. Für dieses Problem existiert eine degenerierte Basislösung. (8 Punkte)

These 4: Sei ein lineares Programm (P) mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $c^T = (1, 2, 0, 0)$ gegeben.

Darüber hinaus seien die zulässigen Lösungen $x^T = \left(3, \frac{3}{2}, 0, 0\right)$ für (P) und $\pi^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ für das duale Problem (D) von (P) gegeben. Die Lösungen x und π sind optimal für (P) bzw. (D). (7 Punkte)

These 5: Für unbeschränkte lineare Programme terminiert der primale Simplexalgorithmus nicht. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Maximaler Fluss) **[32 Punkte]**

In der Vorlesung haben Sie einen Algorithmus zur Ermittlung des maximalen Flusses kennengelernt, der in jeder *Stage* einen *maximal flow* des Hilfsnetzwerks AN(f) bezüglich eines bisher gefundenen Flusses f ermittelt.

Gegeben ist nun die folgende Adjazenzliste für ein Netzwerk mit 7 Knoten:

Knoten i	Nachfolger j, Kapazität $c_{i,j}$; ...
s	1,7 ; 2,8,
1	3,3,; 4,3
2	4,2 ; t,5
3	5,1 ; t,1
4	5,5 ; t,2
5	t,5
t	

a) Zeichnen Sie das Netzwerk mit Knoten, Kanten und Kapazitäten. (4 Punkte)

b) Im Laufe des oben erwähnten Verfahrens wird der folgende zulässige Fluss ermittelt:

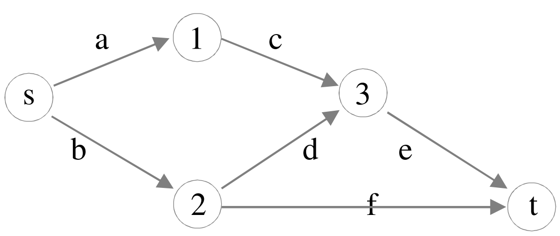
$$f = (f_{(s,1)}, f_{(s,2)}, f_{(1,3)}, f_{(1,4)}, f_{(2,4)}, f_{(2,t)}, f_{(3,5)}, f_{(3,t)}, f_{(4,5)}, f_{(4,t)}, f_{(5,t)})$$

$$= (\ 1\ ,\ 7\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 0\ )$$

Begründen Sie nur mit Hilfe von f, warum der Wert 8 eine untere Schranke für den minimalen s-t-Schnitt ist. (5 Punkte)

c) Fahren Sie mit dem Algorithmus fort und geben Sie den maximalen Fluss von s nach t an. (16 Punkte)

d) Gegeben sei nun das folgende Netzwerk:



mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Fügen Sie in dieses Netzwerk einen Knoten z in eine bereits existierende Kante (x,y) ein, so dass sich der Wert des maximalen s-t-Flusses nicht ändert und **obiger Algorithmus bereits in der ersten Stage einen maximalen s-t-Fluss ermittelt**. Dabei bedeutet das „*Einfügen eines Knotens z in eine Kante (x,y)*", dass (x,y) gelöscht wird und stattdessen die Kanten (x,z) und (z,y) mit Kantenkapazitäten $c_{(x,y)} = c_{(x,z)} = c_{(z,y)}$ hinzugefügt werden. (7 Punkte)

Aufgabe 3 (Ganzzahlige Optimierung) **[28 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximiere } x_1 + x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&6x_1 + 5x_2 + x_3 = 30 \\
&-4x_1 + 5x_2 + x_4 = 5 \\
&\text{mit } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}
$$

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren. (10 Punkte)

b) Führen Sie einen Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems. Nehmen Sie hierbei x_4 in die Basis auf. (7 Punkte)

c) Drücken Sie den ersten in Teilaufgabe b) ermittelten Schnitt unter ausschließlicher Verwendung der Variablen x_1 und x_2 aus. (4 Punkte)

d) Sei ein ausbalanciertes Transportproblem mit ausschließlich ganzzahligen Parametern gegeben. Zusätzlich wird gefordert, dass die Lösung ganzzahlig sein soll. Nun wird auf dieses Problem das Schnittebenenverfahren von Gomory angewendet. Nach wie vielen Schnitten terminiert das Verfahren? (7 Punkte)