Platz-Nr.: ____________

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Bachelor of Science

Wintersemester 2021/2022

Prüfungsgebiet:	BWiWi 4.4 Methoden und Modelle des Operations Research (Combinatorial Optimization)
Tag der Prüfung:	08.03.2022
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der angegebenen vier Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht mit diesem Deckblatt aus insgesamt 4 (vier) Seiten.

Unterschrift: ______________________________________

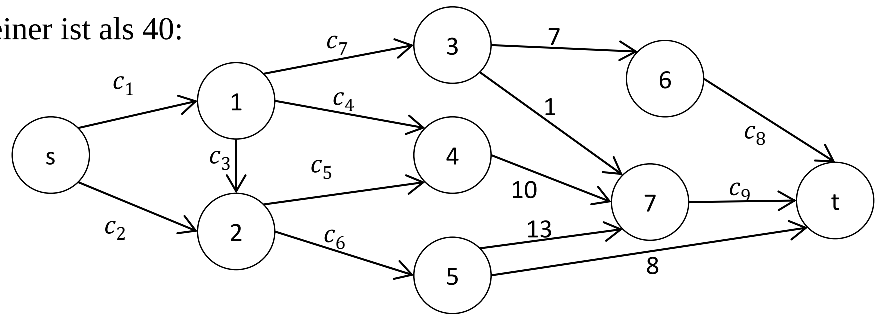
Aufgabe 1 (Thesen) **[32 Punkte]**

Nehmen Sie zu den folgenden Thesen begründet Stellung. Eine auf „ja“ oder „nein“ beschränkte Antwort erhält keine Punkte.

These 1: Sei ein lineares Programm in Standardform P und eine zulässige Basislösung gegeben. Weist diese Basislösung eine Nicht-Basisvariable auf, dessen reduzierte Kosten 0 sind, so ist die Basislösung primal degeneriert. (5 Punkte)

These 2: Sei ein lineares Programm gegeben, wobei der Lösungsraum ein beschränktes Polyeder ist. Existiert eine optimale Lösung, dann ist mindestens eine Ecke des Polyeders optimal. (5 Punkte)

These 3: Es gibt $c_1, \dots c_9$, so dass das folgende Netzwerk einen Fluss besitzt, dessen Wert nicht kleiner ist als 40:



(5 Punkte)

These 4: Sei ein lineares Programm mit den Restriktionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \geq 0$$

gegeben. Dann ist $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$ eine zulässige Basislösung.

(7 Punkte)

These 5: Das folgende lineare Programm besitzt genau 12 zulässige Basislösungen:

$$\min c^T x$$

$$s.t. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (kürzeste Wege) **[9 Punkte]**

Sei die folgende Adjazenzliste gegeben:

Knoten	Nachfolger,Gewicht;
1	2,5; 3,3
2	4,2; 5,5
3	2,1; 5,7
4	5,4
5	

a) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (3 Punkte)

b) Finden sie einen kürzesten 1-5-Weg mithilfe des Dijkstra-Algorithmus‘. (6 Punkte)

Aufgabe 3 (Primal-Dualer Simplexalgorithmus und das Transportproblem) **[31 Punkte]**

a) Beschreiben Sie die Vorgehensweise des Primal-Dualen-Simplexalgorithmus zur Lösung eines Problems P mit seinen Komponenten D, RP und DRP. Begründen Sie, warum die Lösung tatsächlich optimal ist. (12 Punkte)

b) Gegeben sei $\pi = \binom{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha = (0,1)^T$ und $\beta = (1,2,1)^T$ als zulässige duale Lösung des folgenden Transportproblems:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, a = (15,22)^T, b = (15,13,9)^T$$

Liefert diese zulässige duale Lösung bereits eine optimale Lösung für das Transportproblem durch die optimale Lösung des zugehörigen reduzierten primalen Problems RP(π)? Geben Sie die optimale Lösung von RP(π) an? (11 Punkte)

c) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

Sei ein ausbalanciertes Transportproblem mit $m \geq 1$ vielen Anbietern $A_1, \dots, A_m$ und $n \geq 1$ vielen Nachfragern $B_1, \dots, B_n$ gegeben. Kommen nun k weitere Anbieter $A_{m+1}, \dots, A_{m+k}$ und l weitere Nachfrager $B_{n+1}, \dots, B_{n+l}$ hinzu, wobei unter diesen Anbietern und Nachfragern wiederum das Gesamtangebot der Gesamtnachfrage entspricht, so gibt es für dieses erweiterte ausbalancierte Transportproblem eine Basislösung, dessen Basisvariablen ausschließlich Transportwege der Form $A_i \to B_j$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ und der Form $A_i \to B_j$ für $i \in \{m+1, \dots, m+k\}$ und $j \in \{n+1, \dots, n+l\}$ sind. (8 Punkte)

Aufgabe 4 (Ganzzahlige Optimierung) **[18 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximiere } x_1 + x_2\\
&\text{s. t.}\\
&x_1 + x_3 = 5\\
&x_2 + x_4 = 6\\
&10x_1 + 6x_2 + x_5 = 71\\
&\text{mit } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ und } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ ganzzahlig!}
\end{aligned}
$$

a) Berechnen Sie die optimale Lösung der LP-Relaxation des Problems mit dem Simplexverfahren, unter der Verwendung der largest-improvement-rule. (10 Punkte)

b) Fügen Sie den **ersten** Gomory Schnitt in die LP-Relaxation ein und ermitteln Sie die daraus folgende neue optimale Lösung des entstehenden Problems unter Verwendung des Lexikographischen-Dualen-Simplexalgorithmus. (8 Punkte)